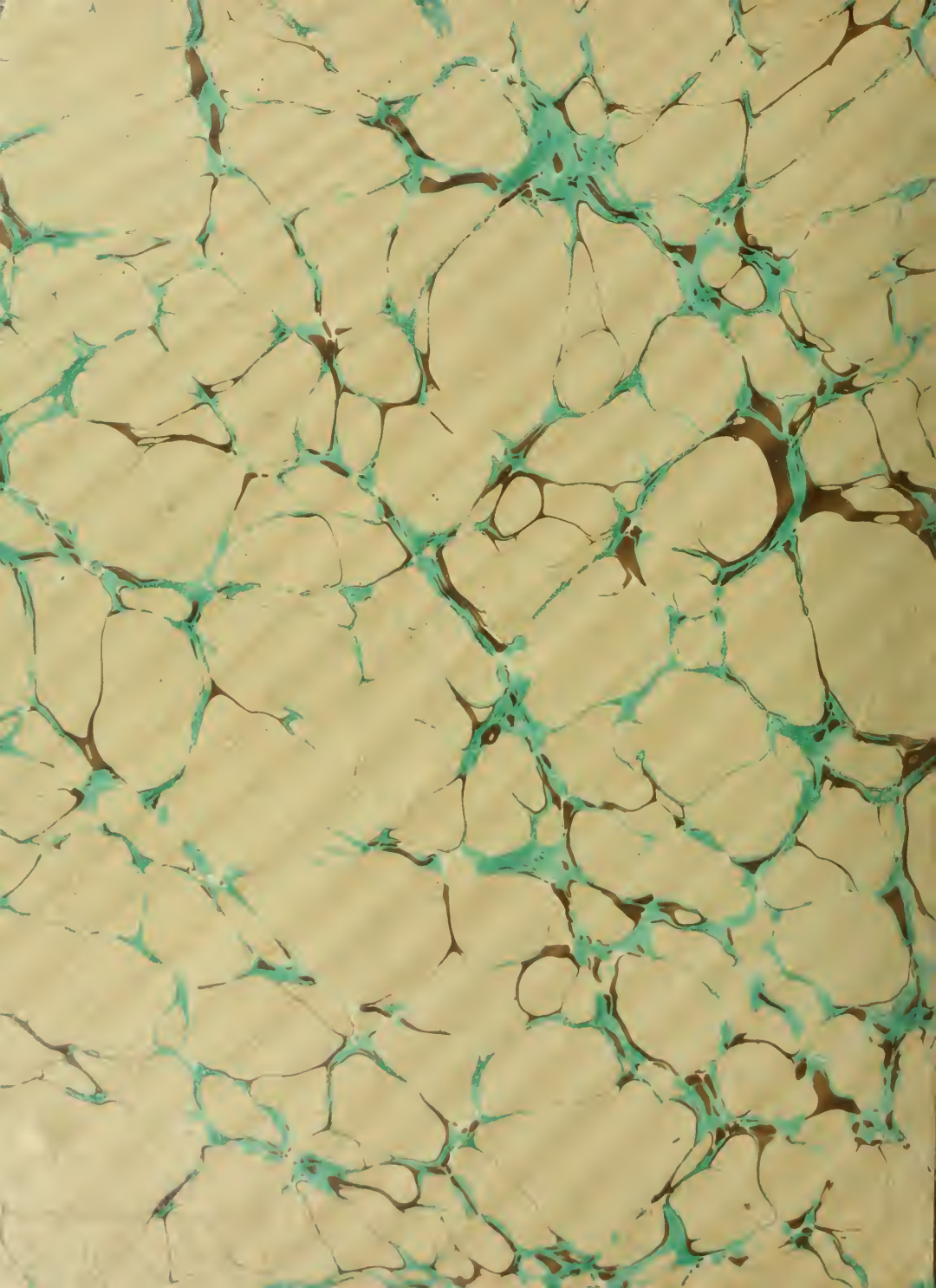


Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s1journaldemat19liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,
Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME XIX. — ANNÉE 1854.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1854

GR
1
J624
t.19

20995
c

TABLE DES MATIÈRES,

TOME XIX.

Pages.

Mémoire sur l'influence qu'exerce la rotation de la Terre sur le mouvement d'un pendule à oscillations coniques ; par M. *A. Bravais*. 1

Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques ; par M. *G. Lamé*. 51

Thèse d'Astronomie. — Recherche du dernier multiplicateur pour deux formes spéciales et remarquables des équations différentielles du problème des trois corps ; par M. *Painvin*. 88

Note sur la discontinuité des valeurs des séries et sur les moyens de la reconnaître ; par M. *Duhamel*. 112

Note sur la décomposition de sin x et cos x en un nombre infini de facteurs ; par M. *Duhamel* 121

Note sur la projection stéréographique ; par M. *E. Catalan*. 132

Mémoire sur l'emploi des mires méridiennes dans le calcul de la déviation azimutale ; par M. *Ernest Liouville*. 139

Sur l'équation différentielle $\frac{d.(x-x^3)\frac{dy}{dx}}{dx} - xy = 0$; par M. *J. Liouville*. . . . 151

Discussion de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de sin 1° ; par M. *Woepcke*. 153

Mémoire sur les facteurs irréductibles de l'expression $x^n - 1$; par M. *Léopold Kronecker*. 177

Deuxième Mémoire sur les fonctions doublement périodiques ; par M. *A. Cayley*. 193

Demonstration d'un théorème sur les déterminants ; par M. *Bazin*. 209

Sur la composition des formes quadratiques à quatre variables ; par M. *Bazin*. . 215

Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches ; par M. *François Brioschi*. 253

Sur la théorie des fonctions abéliennes ; par M. le Dr *Weierstrass*. — Traduit de l'allemand par M. *Woepcke*. 257

Note sur les fonctions semblables des racines d'une équation ; par M. *Léopold Kronecker*. 279

Note sur les nombres complexes ; par M. *Angelo Genocchi*. 281

Démonstration de quelques formules d'un Mémoire de Jacobi ; par M. *V.-A. Lebesgue*. 289

Pages

Addition à la discussion de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de sin 1°; par M. *Woepcke*. 301
Note sur un théorème de M. Brioschi; par M. *Faà de Bruno*. 304
Nouvelles recherches sur les nombres premiers; par M. *A. de Polignac*. 305
Note sur le *Canon arithmeticus* de Jacobi; par M. *V.-A. Lebesgue*. 334
Remarque sur l'emploi des intégrales définies pour exprimer les intégrales des équations aux différentielles partielles; par M. *Duhamel*. 337
Note sur une propriété d'un système de quatre coniques; par M. *Woepcke*. . . . 345
Nouvelle détermination synthétique du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe; par M. *P. Saint-Guilhem*. 356
Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points; par M. *Chasles*. 366
Expression simple du rayon de courbure géodésique d'une ligne tracée sur un ellipsoïde; par M. *J. Liouville*. 368
Sur la quadrature définie des surfaces courbes; par M. *C.-W. Borchardt* (*de Berlin*) 369
Note à l'occasion du Mémoire précédent; par M. *J. Liouville*. 395
Sur un essai de déterminer la nature de la racine d'une équation du troisième degré, contenu dans un ouvrage de Léonard de Pise découvert par M. le prince Balthasar Boncompagni; par M. *Woepcke*. 401
Théorème relatif aux intersections d'un certain système de courbes ou de surfaces; par M. *Woepcke*. 407
Note sur la variation annuelle de l'inclinaison de l'axe de rotation de la lunette méridienne de Gambey; par M. *Ernest Liouville*. 409
Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. F. Woepcke, intitulé : « Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles, d'après les indications tirées d'un manuscrit arabe »; par M. *Chasles*. 413

PLANCHE.

Mémoire sur l'influence qu'exerce la rotation de la Terre sur le mouvement d'un pendule à oscillations coniques.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	
128,	1,	*au lieu de* $\frac{2\pi}{nm}$, *lisez* $\frac{n\pi}{2m}$.
128,	3,	*au lieu de* $\frac{nx}{2\pi}$, *lisez* $\frac{2x}{n\pi}$.
128,	15,	*au lieu de* $m > n$, *lisez* $m > \mu$.
128,	18,	*au lieu de* $> \frac{2x}{\pi}$, *lisez* $> \frac{2x}{\mu\pi}$.
129,	2,	*au lieu de* $3x^3$, *lisez* $\frac{4}{3}x^3$.
129,	20,	supprimer le mot *l'équation*.
146,	16,	*au lieu de* $0^s,18$, *lisez* $-0^s,18$.
189,	5 (en remontant),	*au lieu de* p'', *lisez* p.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE

Sur l'influence qu'exerce la rotation de la Terre sur le mouvement d'un pendule à oscillations coniques [*];

PAR M. A. BRAVAIS,
Lieutenant de vaisseau, Professeur à l'École Polytechnique.

Les recherches que je vais communiquer ont été entreprises à la suite de la publication de la belle expérience faite par M. Foucault sur la déviation du plan d'oscillation d'un pendule à suspension complétement libre. La conséquence forcée de ce fait était la durée inégale des oscillations dextrogyres et lévogyres d'un pendule conique, et j'eus l'honneur d'adresser à ce sujet une communication à l'Académie des Sciences, le 10 février 1851. J'annonçai en même temps qu'il y avait lieu à vérifier expérimentalement cette inégalité théorique, et que la méthode connue des astronomes sous le nom de *méthode des coïncidences* me paraissait surtout éminemment propre à la mettre en évidence.

[*] Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences le 18 août 1851, et soumis à une Commission composée de MM. Binet, Pouillet et Laugier. Un extrait en a été donné par l'auteur dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXXIII, page 195.

Depuis lors, M. Arago ayant eu l'obligeance de mettre à ma disposition la vaste salle de la Méridienne de l'Observatoire impérial, et m'ayant manifesté l'intérêt qu'il portait à cette expérience, je n'ai pas hésité à l'entreprendre, et j'ai eu la satisfaction non-seulement de retrouver l'effet prévu par la théorie, mais même de le mesurer avec un degré de précision que je n'avais pas d'abord espéré atteindre.

On peut se rendre compte de différentes manières de la cause du phénomène que nous avons à étudier. La plus simple, sans nul doute, consiste à décomposer la rotation effective de la Terre autour de son axe, en deux rotations simultanées, l'une ayant lieu d'occident en orient autour de la verticale du point de suspension du pendule; l'autre, pareillement dirigée d'occident en orient, et dont l'axe est une ligne menée par le point de rencontre de la verticale avec l'axe terrestre, dans une direction parallèle à la méridienne du lieu d'observation. Cette proposition n'est vraie que lorsqu'on considère une rotation s'effectuant dans un laps de temps infiniment court; mais les résultats qui s'en déduisent peuvent souvent être étendus au cas de rotations finies, et tel est le cas, entre autres, du phénomène qui nous occupe.

Le résultat des mouvements que produisent alors dans le système les deux rotations simultanées équivaut à celui que produiraient les deux rotations successivement effectuées ; de même que le mouvement produit sous l'impulsion simultanée de deux forces équivaut à la somme géométrique des mouvements produits par ces forces agissant consécutivement. On peut donc considérer les deux rotations isolément, et calculer l'effet de chacune d'elles. Quant à la valeur absolue de chacune des rotations, on démontre facilement qu'elles sont égales à la rotation terrestre multipliée l'une par le sinus, l'autre par le cosinus de la latitude.

Pour savoir quel pourrait être l'effet de la rotation autour de la parallèle à la méridienne, on peut, avec M. Liouville, supposer le pendule à l'équateur, et le faire successivement osciller dans le plan de l'équateur et dans le plan du méridien; on démontre facilement que la rotation ne peut, ni dans l'un ni dans l'autre de ces deux cas, troubler la direction azimutale du mouvement; d'où, par la loi de la superposition des petits mouvements, il est facile de conclure qu'il en sera de même pour tous les azimuts intermédiaires. Cette même con-

clusion est évidemment applicable à toutes les latitudes, tant que l'on ne considère que la rotation autour de la droite normale au plan du premier vertical.

Pour se représenter l'effet de la rotation autour de la verticale, on peut de même se figurer placé au pôle, et y faire osciller le pendule dans différents plans : en considérant le mouvement oscillatoire qui s'établit alors comme indépendant de la rotation que la Terre effectue au-dessous du mobile, il est clair qu'en vertu de l'inertie, le plan restera fixe dans l'espace et paraîtra, quant à son mouvement apparent, se déplacer d'orient en occident, autour de la verticale, avec une vitesse angulaire égale à celle de la rotation terrestre. Il devra en être de même à toute latitude, avec cette différence que la rotation du plan se fera avec une vitesse moindre et sera à la rotation terrestre comme le sinus de la latitude est à l'unité. A la vérité, le pendule n'est pas complétement indépendant du globe terrestre, puisqu'il y tient par son point d'attache supérieur, et que l'effet de la rotation est de tordre le point d'attache sur lui-même dans le sens de cette rotation, à raison d'un tour en vingt-quatre heures sidérales, si l'on est placé au pôle même, avec une vitesse moindre, sous de moindres latitudes. Or il est facile de s'assurer, par exemple, au moyen de la balance de torsion de Coulomb, que l'effet de cette torsion de la partie supérieure du fil, pendant que le pendule oscille, se porte en entier, ou presque en entier, sur le mobile lui-même qui se tord autour de la droite représentant le prolongement du fil dans son intérieur, jusque par delà son centre de gravité.

Si j'ai ajouté les mots « presque en entier », c'est que la proposition énoncée n'est rigoureusement vraie, sans cette restriction, que dans le cas des oscillations infiniment petites. Lorsque les amplitudes sont considérables à l'extrémité de chaque oscillation, une partie de l'effet de la torsion du fil se transmet, par l'intermédiaire du fil lui-même, au centre de gravité du mobile, et tend à le dévier dans le sens vers lequel porte la rotation du point de suspension, effet très-faible qui a été examiné avec soin par Poisson dans un Mémoire inséré dans la *Connaissance des Temps* pour l'année 1819.

En négligeant cette très-faible action, qui s'annule d'ailleurs dans les oscillations infiniment petites, en négligeant aussi l'action très-

faible que l'air peut opposer par sa résistance, on trouve que le pendule peut être considéré comme effectuant ses vibrations indépendamment du globe, et les lois de son mouvement relatif, le seul que nous puissions directement apprécier, sont alors celles que nous venons d'indiquer.

Lorsque le mouvement d'un pendule libre cesse de se faire rigoureusement dans un plan vertical, la trajectoire se change en une sorte d'ellipse qui diffère d'autant moins de l'ellipse des géomètres, que les amplitudes des oscillations sont plus petites. Dans ce cas encore, la rotation composante autour de la verticale ne troublera pas la manière dont s'effectueront les oscillations considérées dans l'espace absolu, et, par conséquent, le grand axe de l'ellipse d'oscillation devra paraître se porter régulièrement de l'orient vers l'occident, avec la même vitesse angulaire que dans le cas des oscillations planes.

Lorsque la courbe décrite par le mobile devient complétement circulaire, comme cela a lieu dans le cas du pendule conique, il n'y a plus de grand axe ni de petit axe, et, par conséquent, le phénomène de la déviation des axes cesse d'avoir lieu, mais l'effet de la rotation terrestre ne disparaît pas pour cela; il se reproduit sous une autre forme, et affecte la durée de la révolution, c'est-à-dire de l'intervalle entre deux passages successifs par le méridien du point de suspension. L'altération ainsi produite est trop faible pour être appréciable en une seule oscillation; mais, comme rien ne s'oppose à ce que l'on prolonge les observations en laissant le mouvement oscillatoire se continuer, on conçoit qu'au bout d'un certain laps de temps, la différence produite par la rotation terrestre peut devenir très-perceptible.

Soit T la durée de la rotation terrestre égale à vingt-quatre heures sidérales ($23^h\,56^m\,4^s,19$), soit t la durée de la révolution du pendule conique autour de la verticale, durée qui dépend de la longueur l du fil suspenseur et de l'intensité g de la gravité, d'après la formule connue

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

la vitesse angulaire de la rotation terrestre sera représentée par $\frac{2\pi}{T}$, et celle

de la rotation composante autour de la verticale par $\frac{2\pi}{T}\sin\lambda$, λ étant la latitude astronomique du lieu.

Soient maintenant t_w la durée apparente de la rotation lorsque le mouvement pendulaire s'effectue d'occident en orient, t_e la même durée lorsque ce mouvement s'effectue d'orient en occident; dans le premier cas, la vitesse de rotation absolue $\frac{2\pi}{t}$ sera égale à la vitesse apparente augmentée de la vitesse de rotation de la Terre, puisque ces deux vitesses ont lieu dans le même sens, et l'on aura

$$(1)\qquad \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{t_w} + \frac{2\pi\sin\lambda}{T}.$$

Dans le second cas, les vitesses se retranchent, et l'on aura

$$(2)\qquad \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{t_e} - \frac{2\pi\sin\lambda}{T};$$

on déduit de là

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_e} + \frac{1}{t_w}\right) = \frac{1}{t}, \\ \frac{1}{t_e} - \frac{1}{t_w} = \frac{2\sin\lambda}{T}. \end{cases}$$

Cette dernière formule montre quel sera l'effet de l'action terrestre si l'on fait mouvoir le pendule alternativement dans les deux sens; les durées t_e, t_w ne seront pas identiques; le mouvement d'orient en occident accélérera l'oscillation, tandis que le mouvement inverse la ralentira.

Les appareils ont été disposés de la manière suivante dans une première série d'observations : Un fort madrier de chêne, de $1^m,07$ de longueur sur 150 millimètres de large et 95 millimètres de hauteur, fut disposé horizontalement à $11^m,6$ au-dessus du sol de la salle de la Méridienne. Sur sa face inférieure on boulonna une forte plaque de cuivre p (*fig.* 1, *côté droit de la figure, Pl. I*), taraudée dans sa partie centrale; le fil suspenseur, en acier recuit, fut soudé à l'étain suivant l'axe de la vis S, et en vissant cette pièce sur le plateau fixe p, le fil se trouva parfaitement maintenu dans sa partie supérieure. La partie inférieure du fil fut soudée de même dans la pièce s analogue à S, mais de di-

mensions moindres, et de manière à la traverser suivant son axe; cette pièce portait un filet de vis sur sa surface extérieure.

Le poids consistait en un cylindre en cuivre C, travaillé au tour, et dont la partie supérieure était traversée par une pièce à vis VT, dont la partie supérieure T venait se visser fortement sur le bas de la pièce *s*. Selon que le cylindre était plus ou moins vissé par l'opérateur sur la partie TV, la distance de son centre de gravité au point d'attache devenait plus ou moins considérable. Le cylindre pouvait être complétement rempli de mercure; son poids total égalait alors 10700 grammes.

Pour mettre le cylindre en mouvement, et surtout lui donner une rotation parfaitement circulaire, on plaça au-dessous du fil un trépied en bois de chêne fort et épais, supportant un plateau de chêne *cc*, et, par-dessus le plateau, un mouvement d'horlogerie M, mû par des poids, et dont les engrenages étaient disposés de manière à faire tourner l'axe *aa*, soit d'occident en orient, soit d'orient en occident. L'axe *aa* était couronné par la plate-forme F qu'il entraînait dans son mouvement, et de celle-ci partait un levier à branches horizontales articulées. La dernière branche LL′ de ce levier était ajustée de manière que celle de ses deux faces latérales qui précédait l'autre pendant la rotation fût dirigée vers le centre de la plate-forme F. Le trépied lui-même était placé de telle manière que le prolongement du fil $\varphi\varphi$, à l'état de repos, vînt passer par le centre de la même plate-forme.

Alors on vissait à la paroi inférieure du cylindre C une petite tige cylindrique *t*, dont le niveau inférieur atteignait presque la plate-forme F. Cela fait, on écartait à la main le cylindre C, en le tirant vers le levier L, et l'on faisait reposer le petit tenon *t* sur une petite saillie placée en *r*, le long de la face latérale du levier mobile. La détente du mouvement était alors écartée, le poids commençait à agir: le levier L, commençant sa rotation, entraînait la tige *t* et le cylindre C. A l'origine du mouvement, le cylindre C exerçant une certaine pression sur le repos *r*, le frottement suffisait pour tordre le fil $\varphi\varphi$ sur lui-même, et le fil se détordait de temps à autre par des mouvements saccadés; mais bientôt, la rotation venant à s'accélérer, la force centrifuge diminuait la pression et le frottement; toute torsion sensible cessait dans le cylindre C et dans le fil qui le supportait; enfin la force centrifuge devenait égale à la composante horizontale de la tension du

fil, et toute pression cessait sur le repos r. A partir de ce moment, le poids Π continuant à agir, la tige t se détachait de r, et, s'écartant de plus en plus du centre de la rotation, remontait lentement le long de la face latérale du levier LL′. Le poids moteur était réglé de manière à ce que ce mouvement centrifuge ne fût ni trop rapide ni trop lent. Une graduation, tracée de L en L′, permettait de reconnaître s'il s'effectuait avec régularité : en effet, dans le cas où l'action du moteur était inégale et saccadée, la trajectoire décrite par le cylindre devenait elliptique, et la variation des rayons vecteurs devenait sensible par l'irrégularité de la progression de la tige t de L vers L′. Lorsque la tige t avait atteint le point de la graduation correspondant à l'amplitude de rotation que l'on avait assignée d'avance, on arrêtait à la main le levier LL′, et on l'abaissait au-dessous de son niveau précédent en le faisant tourner autour d'une articulation à axe horizontal placée en α. Le cylindre C continuait alors son mouvement, il est facile de voir qu'il devait être parfaitement circulaire.

Petit à petit, ces oscillations circulaires allaient en se resserrant, les amplitudes diminuaient; or, l'on pouvait, à une époque quelconque du mouvement, non-seulement mesurer l'amplitude correspondante, mais même voir si le cercle avait dégénéré en une ellipse. Il suffisait de relever le levier LL′, de sorte que la face supérieure fût très-peu au-dessous du plan horizontal décrit par l'extrémité inférieure de la tige t; la division de la graduation que recouvrait cette tige, au moment de son passage, indiquait la grandeur du rayon vecteur de l'orbite; on avait soin de répéter cette observation suivant les huit directions principales : nord, nord-est, est, sud-est, sud, sud-ouest, ouest et nord-ouest.

Le mouvement d'horlogerie qui devait imprimer le mouvement circulaire a fonctionné d'une manière satisfaisante pendant mes premières observations; vers la fin, il a fatigué de plus en plus, et les dents de la roue de rencontre se sont usées; les avaries étaient réparables; mais, pressé par le temps, j'ai fini par revenir à l'usage du poids moteur, et j'ai agi directement sur l'axe aa, à la main, au moyen d'un cordon qui l'embrassait de un ou deux de ses tours. On conçoit que le mouvement initial, dans ces conditions peu favorables, ait dû devenir un

peu elliptique; mais cette ellipticité a toujours été peu sensible, au moins dans l'état initial de l'orbite.

OBSERVATIONS PAR LA MÉTHODE DES DURÉES.

Pour pouvoir mesurer la durée d'oscillations, un théodolite était placé en S (*fig.* 2) à une dizaine de mètres de distance du point B, centre de l'oscillation circulaire du mobile, et précisément dans la direction du sud par rapport à B. La lunette du théodolite était dirigée sur la partie inférieure du fil suspenseur, à quelques centimètres au-dessus de la pièce sur laquelle le fil était soudé. A l'état de repos, l'image du fil suspenseur coïncidait rigoureusement avec le fil vertical du réticule de la lunette. Le fil étant mis en mouvement, on notait sur un chronomètre les passages de l'image par le milieu du champ, dans ses mouvements de la droite à la gauche de l'observateur.

Pour plus de précision, on observait l'époque des oscillations 0, 5, 10, 15 et 20, et la moyenne de ces nombres était censée représenter l'heure de l'oscillation n° 10; de même, on notait aussi les époques des oscillations 100, 105, 110, 115 et 120, et la moyenne était considérée comme donnant l'heure de l'oscillation n° 110 [*], et ainsi de suite après chaque nouvelle centaine.

On continuait ainsi pendant 1200 oscillations, observant régulièrement les grandeurs décroissantes de la courbe décrite par le mobile, et son ellipticité par la mesure des huit rayons vecteurs principaux, enfin toutes les circonstances du mouvement final. On arrêtait alors le pendule, puis on le mettait en mouvement dans le sens opposé, et l'on recommençait la série, en ayant soin que les amplitudes initiales, à l'oscillation 0 de chacune de ces deux séries, fussent sensiblement les mêmes.

Après avoir observé de nouveau 1200 oscillations, et pris dans cette nouvelle série les mêmes annotations que dans la série précédente, on

[*] Cinq oscillations équivalant à très-peu près à 32 secondes, sur le pendule que j'employais, le dixième de seconde revenait sensiblement le même, ce qui nuisait à la précision de l'observation; pour parer à cet inconvénient, dans les observations qui ont suivi celles du 5 mai, on a noté l'heure aux oscillations 0, 6, 12, 18 et 24.

possédait tous les éléments nécessaires pour calculer t_e et t_w, et en déduire l'effet de la Terre.

La température variait dans la salle avec une lenteur extrême; on l'enregistrait avant et après chaque série, cet élément pouvant influer sur la longueur du fil, et, par suite, sur la durée des oscillations. La réduction provenant de la variation thermométrique entre les deux séries a toujours été sensiblement nulle, et je n'en ai pas tenu compte; on la trouvera toutefois mentionnée dans les observations.

A partir du 13 mai 1851, j'ai installé deux fils pareils à côté l'un de l'autre, de mêmes grosseur et longueur, chacun d'eux supportant un cylindre de même forme et de même poids, tous deux remplis de mercure. La *fig.* 1 représente les deux fils ainsi placés à côté l'un de l'autre.

Pendant que l'un des cylindres était mis en mouvement d'orient en occident, l'autre était mis en mouvement en sens inverse. Le théodolite étant pourvu de deux lunettes, l'une visait sur le fil de droite, l'autre sur le fil de gauche. Les cylindres étaient ensuite mis en mouvement en sens inverse, de sorte que, dans le même laps de temps, et sans plus de fatigues, on pouvait faire une double observation. On a réduit les durées totales de 1200 à 900 oscillations, et l'on a pris des amplitudes initiales moindres.

Par ces dispositions nouvelles, l'effet des variations de température et de toutes les causes d'erreur susceptibles d'affecter dans le même sens les deux fils, se trouvait éliminé.

Corrections à faire aux heures des passages. — Lorsqu'on a obtenu la durée d'un nombre considérable d'oscillations, avant d'en conclure la durée d'une oscillation simple, il faut appliquer aux heures des passages des corrections de deux sortes; les unes ont pour but de réduire les amplitudes finies au cas des amplitudes infiniment petites, les autres de réduire le mouvement elliptique au mouvement circulaire.

La formule

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4}$$

ne convient rigoureusement qu'au cas des amplitudes infiniment

petites. Dans le cas contraire, soient α l'angle maximum que fait le fil avec la verticale au moment où le mobile atteint l'extrémité du grand axe de sa trajectoire, β l'angle minimum du fil avec la verticale correspondant à l'extrémité du petit axe. On sait que l'expression de la durée moyenne de l'oscillation peut se développer en fonction symétrique de α et de β, sous la forme

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+m\alpha^2+m\beta^2+n\alpha\beta+p\alpha^4+p\beta^4+q\alpha^3\beta+q\beta^3\alpha+r\alpha^2\beta^2+\ldots),$$

qui ne renferme que des termes d'ordre pair [*]; m, n, p étant des coefficients à déterminer.

Mais, en se bornant aux quantités du second ordre déjà très-petites, cette expression prendra la forme

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + m\alpha^2 + m\beta^2 + n\alpha\beta),$$

et il sera facile de déterminer m et n, en remarquant :

1°. Que, dans le cas des oscillations planes, où $\beta = 0$, on a, par une formule connue,

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2\right),$$

d'où, par conséquent,

$$m = +\frac{1}{16};$$

2°. Que, dans le cas des oscillations circulaires, où $\beta = \alpha$, on a, par une formule tout aussi connue,

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right);$$

d'où

$$2m + n = -\frac{1}{4}, \quad n = -\frac{6}{16}.$$

---

[*] Les équations différentielles sont, en effet, symétriques en α et en β, et ne changent pas de valeurs quand on remplace α, β par $-\alpha$, $-\beta$. *Voyez*, entre autres, LAGRANGE, *Mécanique analytique*, édition de 1811, tome II, page 198.

Ainsi l'on doit avoir, dans le cas général [*],

$$(5) \qquad t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha\beta}{16}\right).$$

Dans le cas actuel, où α et β différaient toujours très-peu entre eux, la quantité entre parenthèses, mise sous la forme

$$1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\left[1 - 2\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\right],$$

pouvait sans erreur se réduire à

$$1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2,$$

du moins dans l'immense majorité des cas que j'ai eus à traiter.

On avait ainsi à diviser chaque durée d'oscillation par le facteur $1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$. On pouvait alors se borner à appliquer à la durée de chaque centaine d'oscillations la correction additive

$$+ 100\, t\, \frac{R^2}{l^2},$$

R étant le rayon vecteur *moyen* de l'orbite pendant cette période; une petite Table, calculée d'avance en fonction de l'argument R, rendait ce calcul assez facile.

Si $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont les rayons moyens pendant la première période qui s'étend de l'heure H_0 à l'heure H_1, pendant la deuxième période qui s'étend de l'heure H_1 à l'heure H_2. etc., et pendant la $n^{ième}$ période qui s'étend de H_{n-1} à H_n, on éliminera l'effet des amplitudes si l'on applique à l'heure initiale

H_0 la correction négative $- 100\, t.\frac{R_1^2}{l^2} - 100\, t.\frac{R_2^2}{l^2} \ldots - 100\, t\, \frac{R_n^2}{l^2} = - t\, \Sigma\, \frac{R^2}{l^2}$,

H_1 la correction négative ..... $- 100\, t.\frac{R_2^2}{l^2} \ldots - 100\, t\, \frac{R_n^2}{l^2}$,

H_{n-1} la correction negative.... ..... $- 100\, t.\frac{R_n^2}{l^2}$,

H_n la correction negative.... ..... 0.

[*] Cette formule est une consequence de la théorie de Lagrange, et, si Lagrange ne l'a point obtenue dans sa *Mécanique analytique*, 2me édition, tome II, page 204, c'est par suite d'une erreur de calcul que j'ai retrouvée et corrigée. (*Voyez* la Note à la fin de ce Mémoire.)

Pour réduire le mouvement elliptique au mouvement circulaire, il importe de se rappeler que les aires décrites autour du centre sont proportionnelles au temps; ainsi la vitesse angulaire de rotation n'est rigoureusement constante que dans le cas du mouvement circulaire. Si ce mouvement devient elliptique, il conviendra de considérer un pendule fictif animé d'un mouvement circulaire proportionnel au temps, et dont le rayon vecteur ne coïncidera avec celui du pendule vrai que dans les passages par le grand et le petit axe de l'ellipse. En dehors de ces quatre époques de coïncidence, pour chaque révolution du mobile, il se produit une anomalie que l'on calculera de la manière suivante :

Soient OA et OB (*fig.* 3) les deux axes de l'ellipse, que je représenterai par α et β; soit OR″ le rayon vecteur fixe qui, prolongé, vient aboutir au théodolite; soit h_v l'heure vraie à laquelle le mobile traverse ce rayon, allant, par exemple, de A en B, et comptée du passage en A; soit h_m l'heure à laquelle le mobile fictif le traverse à son tour, dans sa rotation uniforme dont la vitesse est $\frac{2\pi}{t}$: soient x, y les coordonnées de R″ rapportées aux axes OA et OB; on aura

$$x = \alpha \cos \frac{2\pi h_v}{t}, \quad y = \beta \sin \frac{2\pi h_v}{t},$$

$$\operatorname{tang} \mathrm{AOR}'' = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tang} \frac{2\pi h_v}{t}:$$

et, par une formule connue,

$$\frac{2\pi h_v}{t} = \mathrm{AOR}'' + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \sin 2\,\mathrm{AOR}'' + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \sin 4\,\mathrm{AOR}'' + \ldots,$$

et, en négligeant les termes en $\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$,

$$\frac{2\pi h_v}{t} = \frac{2\pi h_m}{t} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \sin 2\,\mathrm{AOR}'' \left(1 + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \cos 2\,\mathrm{AOR}''\right).$$

Donc

$$h_m - h_v = -\frac{t}{2\pi} \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \sin 2\,\mathrm{AOR} \left(1 + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \cos 2\,\mathrm{AOR}''\right).$$

Telle est l'expression de la correction horaire due à l'ellipticité de l'orbite, α représentant la grandeur du demi-axe qui précède le passage, et β celle du demi-axe qui suit le passage.

Or on avait mesuré, par la méthode indiquée ci-dessus,

Le rayon vecteur OR $= R$, normal à OR″ et *précédant* OR″ *dans le sens de la rotation*,

Le rayon vecteur OR′ $= R'$, faisant un angle de 45° avec OR″ et le précédant aussi,

Le rayon vecteur OR″ $= R''$,

Enfin le rayon vecteur OR‴ $= R'''$, faisant un angle de 45° avec OR″ et venant après lui dans le sens du mouvement du pendule.

L'ellipse étant peu excentrique, on trouve facilement que l'on avait, à fort peu près,

$$\alpha + \beta = R + R'' = R' + R'''.$$
$$(\alpha - \beta) \cos 2\,AOR'' = R'' - R,$$
$$(\alpha - \beta) \sin 2\,AOR'' = R' - R''';$$

de là résulte la valeur suivante de la correction d'ellipticité :

$$-\frac{t}{2\pi}\left(\frac{R' - R'''}{R + R''}\right)\left(1 + \frac{R'' - R}{R + R''}\right);$$

si l'on y remplace $1 + \frac{R'' - R}{R + R''}$ par $\frac{1}{1 + \frac{R - R''}{R + R''}}$, ce qui en trouble très-peu la valeur, elle devient égale à

$$\frac{t}{2\pi} \cdot \frac{R''' - R'}{2R};$$

telle est la correction, additive ou soustractive, selon que $R''' >$ ou $< R'$, qui a été appliquée à l'heure des passages.

Si, au lieu de noter le passage du pendule à travers le vertical OR″ du côté de OR″, on avait à le noter du côté opposé de l'orbite et sur le prolongement de OR″, il est clair que la correction conserverait sa valeur et son signe.

On peut se borner à appliquer cette correction à l'heure initiale ainsi qu'à l'heure finale; en les représentant par C_i et C_f, désignant par N le nombre des oscillations, il est clair qu'il faudra ajouter à la durée observée le terme $\frac{C_f - C_i}{N} = \Delta$.

La correction C_i est ordinairement très-faible et souvent négligeable,

le mouvement initial étant toujours presque circulaire; mais il n'en est pas de même du terme C_f, qui parfois s'est élevé à près d'un dixième de seconde.

On peut comprendre dans la valeur de C_i le terme $-t\Sigma\frac{R^2}{l^2}$, qui représente la correction de l'heure initiale dépendant des amplitudes, et alors la quantité Δ, ainsi calculée, représentera d'une manière suffisamment exacte l'ensemble des deux corrections dépendant des amplitudes et de l'ellipticité.

Détermination de la durée la plus probable. — La méthode des moindres carrés, appliquée à ce cas, mène à un mode de calcul fort simple, qui ne diffère pas de celui que j'ai indiqué dans mon Mémoire : *Sur la mesure de l'intensité magnétique en divers points de la Suisse, de la Savoie, etc.* [*].

Je prendrai pour exemple l'une des séries du 16 mai :

OSCILLATIONS.	HEURES.	CORRECTIONS.	HEURES CORRIGÉES.
	h m s	s	h m s
0	3.10. 5,19	— 0,42	3.10. 4,77
100	3.20.45,29	— 0,34	3.20.44,95
200	3.31.25,31	— 0,28	3.31.25,03
300	3.42. 5,40	— 0,22	3.42. 5,18
400	3.52.45,48	— 0,17	3.52.45,31
500	4. 3.25,53	— 0,13	4 3 25,40
600	4.14. 5,51	— 0,09	4 14. 5,42
700	4.24.45,60	— 0,05	4.24.45,55
800	4.35.25,69	— 0,03	4.35.25,66
900	4.46. 5,78	— 0,00	4.46. 5,78

La première colonne de ce tableau donne le numéro de l'oscillation, la deuxième l'heure correspondante, la troisième la réduction à l'amplitude infiniment petite calculée par la méthode indiquée ci-dessus, la dernière l'heure corrigée.

La combinaison 0,900 donne 6s,40112 avec le poids 81,
celle 100,800 donne 6,40101 avec le poids 49,
celle 200,700 donne 6,40104 avec le poids 25,
celle 300,600 donne 6,40080 avec le poids 9,
celle 400,500 donne 6,40090 avec le poids 1.

[*] *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, tome XVIII.

Le poids étant proportionnel au carré des nombres d'oscillations, on trouve facilement pour la durée la plus probable,

$$6^s,40106,$$

durée à laquelle on devra ensuite appliquer la correction relative à l'ellipticité de l'orbite.

Toutes les observations ont été faites avec le chronomètre n° 310 de Winnerl; sa marche, parfaitement régulière, était une avance de $2^s,2$ en vingt-quatre heures; il retardait de quinze minutes en mai et de quatorze minutes en juin sur le temps moyen de Paris.

Je vais communiquer maintenant les résultats principaux des observations.

5 *mai* 1851. — Distance du point d'attache supérieur au centre du cylindre = 10 200 millimètres environ. Cette longueur n'a pas été exactement mesurée; mais on pourrait la déduire au besoin de la durée d'oscillation qui a été exactement déterminée :

Température de la salle (1re série) = 10°,85,
Température de la salle (2me série) = 10,75.
Rotation d'orient en occident = $6^s,39818$ (1re série), 1200 oscillations,
Rotation d'occident en orient = 6,39896 (2me série), 1200 oscillations.

Ces durées, corrigées de l'effet de l'ellipticité finale des orbites, deviennent :

Orient en occident = $6^s,39823$
Occident en orient = 6,39887
Valeur moyenne.. = 6,39855

9 *mai* 1851. — Vers le milieu de la deuxième série, le fil s'est dessoudé et la série a été interrompue; cette journée ne peut donc entrer en ligne de compte dans le résultat général.

Même longueur de fil à peu près :

Température de la salle (1re série) = 11°,75,
Température de la salle (2me série) = 11, 9.
Rotation d'occident en orient = $6^s,39910$ (1re série), 1200 oscillations,
Rotation d'orient en occident = 6,39858 (2me série), 400 oscillations

Ces durées, corrigées de l'ellipticité de l'orbite, deviennent :

La première.....	$6^s,39902$
La deuxième.....	$6,39864$
Valeur moyenne.....	$6,39883$

11 *mai* 1851. — Le fil a été ressoudé; il a sensiblement conservé sa longueur.

Temperature de la salle (1re série) = 11°,87.

Temperature de la salle (2me série) = 12,02.

Rotation d'occident en orient = $6^s,39935$ (1re série), 1200 oscillations,

Rotation d'orient en occident = $6,39839$ (2me série), 1200 oscillations.

En corrigeant ces durées de l'effet de l'ellipticité de l'orbite, on a :

Occident en orient =	$6^s,39925$
Orient en occident =	$6,39849$
Valeur moyenne.. =	$6,39887$

A partir de ce jour, on a mesuré aussi exactement que possible les longueurs du fil.

La distance invariable du point S, à l'extrémité supérieure de la vis T, a été trouvée égale à $10036^{mm},5$ sous la température de 13 degrés, et sous la tension de $10^k,5$, égale à celle du poids du cylindre. Cette longueur, ainsi que celle du fil B, ont été mesurées sur le parquet de la salle de la Méridienne, avec un compas à verge de 4 décimètres, vérifié sur un mètre étalon de Lenoir, appartenant à l'École Polytechnique. En calculant les longueurs inscrites ci-après, on a supposé le nombre 10036,5 invariable, malgré les changements de température. Pour avoir les vraies longueurs, il faudra donc leur appliquer une correction dépendant des variations thermométriques de la salle.

16 *mai* 1851. — Longueur totale depuis le point d'attache jusqu'au centre de gravité du cylindre = $10187^{mm},1$:

Temperature de la salle (1re série) = 12°,15.

Temperature de la salle (2me série) = 12,3

Rotation d'occident en orient... durée = $6^s,39816$ (1re série), 900 oscillations,

Rotation d'orient en occident... durée = $6,39752$ (2me série), 800 oscillations

En corrigeant les durées des effets de l'ellipticité, on trouve :

Occident en orient $= 6^s,39815$
Orient en occident $= 6,39751$
Valeur moyenne.. $= 6,39783$

18 *mai* 1851. — Longueur totale du point d'attache supérieur au centre du cylindre $= 10190^{mm},7$:

Température de la salle (1re série) $= 13^\circ,05$,
Température de la salle (2me série) $= 13,00$.
Rotation d'orient en occident... durée $= 6^s,39864$ (1re série), 900 oscillations,
Rotation d'occident en orient... durée $= 6,39960$ (2me série), 800 oscillations.

En corrigeant ces nombres des effets de l'ellipticité de l'orbite, on trouve :

Orient en occident $= 6^s,39863$
Occident en orient $= 6,39959$
Valeur moyenne.. $= 6,39911$

OBSERVATIONS FAITES AVEC LE FIL B.

Ce fil a été mis en place à côté du fil A le 14 mai, et du côté de l'orient. La distance invariable du point S (*fig.* 1), à l'extrémité supérieure de la tête de la vis T, a été trouvée égale à 10042 millimetres, sous la tension $10^k,500$ et par une température de $11^\circ,9$. En calculant les longueurs inscrites ci-après, on n'a tenu compte que de la variation de la distance du point T au centre du cylindre, mais non des changements de température, et l'on a supposé la longueur 10042 invariable. Pour avoir les véritables longueurs, il faudra donc leur appliquer une correction dépendant de la température.

16 *mai* 1851. — Longueur totale depuis le point d'attache supérieur jusqu'au centre de gravité du cylindre $= 10196^{mm},2$:

Température de la salle (1re série) $= 12^\circ,15$,
Température de la salle (2me série) $= 12,3$.
Rotation d'orient en occident... durée $= 6^s,40037$ (1re série), 800 oscillations,
Rotation d'occident en orient... durée $= 6,40106$ (2me série), 900 oscillations.

En corrigeant ces durées de l'effet de l'ellipticité, on trouve :

Orient en occident $= 6^s,40032$
Occident en orient $= 6,40106$
Valeur moyenne.. $= 6,40069$

18 *mai* 1851. — Longueur totale jusqu'au centre du cylindre $= 10196^{mm},2$:

Température de la salle (1re série) $= 13^\circ,05$,
Température de la salle (2me série) $= 13,00$.
Rotation d'occident en orient... durée $= 6^s,40116$ (1re série), 800 oscillations.
Rotation d'orient en occident... durée $= 6,40051$ (2me série), 900 oscillations.

Les mêmes durées étant corrigées de l'effet de l'ellipticité, on a :

Occident en orient $= 6^s,40116$
Orient en occident $= 6,40044$
Durée moyenne... $= 6,40080$

A partir du 20 mai, d'autres observations ont été faites par la méthode des coïncidences dont je parlerai bientôt; mais comme on a continué à noter les époques des oscillations sur le fil B, on peut aussi se servir de ces observations pour déterminer l'effet de la Terre. On doit seulement remarquer que la précision des lectures était alors notablement moindre, attendu que chacune d'elles correspondait à un seul passage du fil, et non à la moyenne de cinq passages successifs. Voici les nombres que l'on a obtenus :

25 *mai* 1851. — Longueur totale jusqu'au centre du cylindre $= 10216^{mm},2$:

Température de la salle (1re serie) $= 14^\circ,05$,
Température de la salle (2me serie) $= 14,15$.
Rotation d'orient en occident... durée $= 6^s,40685$ (1re série), 880 oscillations,
Rotation d'occident en orient... durée $= 6,40741$ (2me série), 820 oscillations.

Les mêmes durées étant corrigées des effets de l'ellipticité, on a obtenu :

Orient en occident $= 6^s,40684$
Occident en orient $= 6,40741$
Durée moyenne... $= 6,40712,5$

10 *juin* 1851 [*]. — Longueur totale jusqu'au centre du cylindre $= 10216^{mm},2$:

Température de la salle (1re série) = 16°,85,

Température de la salle (2me série) = 16, 7.

Rotation d'orient en occident... durée = 6s,40683 (1re série), 870 oscillations,

Rotation d'occident en orient... durée = 6,40768 (2me série), 830 oscillations.

Les mêmes durées étant corrigées des effets de l'ellipticité, on a eu :

Orient en occident = 6s,40674

Occident en orient = 6,40768

Durée moyenne... = 6,40721

En comparant ces nombres entiers, il convient de réduire les valeurs des durées à la longueur invariable 10200 millimètres et à la température de 12°,5. On trouve alors le tableau suivant :

	FIL A.			
	5 MAI.	11 MAI.	16 MAI.	18 MAI.
Occident en orient...	»	»	6s,40221	6s,40247
Orient en occident.	»	»	6, 40157	6, 40151
Duree moyenne.....	»	»	6, 40189	6, 40199
Différence.....	0s,00064	0s,00076	0, 00064	0, 00096

	FIL B.			
	16 MAI.	18 MAI.	25 MAI.	10 JUIN
Occident en orient.	6s,40226	6s,40231	6s,40227	6s,40245
Orient en occident .	6, 40152	6, 40159	6, 40170	6, 40151
Durée moyenne	6, 40189	6, 40195	6, 40198	6, 40198
Différence.	0, 00074	0, 00072	0, 00057	0, 00094

[*] M. Laugier a bien voulu me prêter son concours, aussi éclairé que bienveillant, dans les observations de cette journee.

Il faut remarquer que les durées $0^s,0057$ et $0^s,0094$ proviennent des observations moins précises des 25 mai et 10 juin.

On peut adopter, pour la valeur moyenne des durées d'oscillations, le nombre $6^s,40194$.

Les nombres de ce tableau peuvent donner une idée suffisamment exacte du degré de précision que l'on obtient par ce mode d'expérimentation.

Pour comparer ces résultats avec la théorie, il faut déduire la valeur de $t_w - t_e$ de la formule (1), mise sous la forme

$$t_w - t_e = \frac{2\, t_e\, t_w . \sin\lambda}{T}.$$

Posant

$$\lambda = 48^\circ\, 50'\, 13'', \quad T = 86164^s, \quad t_e\, t_w = (6^s,402)^2,$$

on trouve

$$t_w - t_e = 0^s,0007162.$$

La moyenne des quatre observations faites avec le fil A, et des deux premières observations faites avec le fil B, donne

$$t_w - t_e = 0^s.000743.$$

L'accord de ce nombre avec le précédent est aussi parfait qu'on puisse le désirer, eu égard à la précision des observations et à l'accord des divers nombres avec leur moyenne.

On conclut facilement de ce qui précède que la durée de l'oscillation du pendule simple de longueur l, se mouvant coniquement, doit être représentée par

$$t_w = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{4\pi^2 l}{g}\frac{\sin\lambda}{T} \quad \text{si le mouvement a lieu d'occident en orient,}$$

$$t_e = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - \frac{4\pi^2 l}{g}\frac{\sin\lambda}{T} \quad \text{si le mouvement a lieu d'orient en occident.}$$

OBSERVATIONS PAR LA MÉTHODE DES COINCIDENCES.

Quoique la méthode précédente suffise pour mettre hors de doute la nécessité de tenir compte de la rotation terrestre, dans l'expression de la rotation du pendule, elle ne suffit pas pour décider la question de savoir si le retard ou l'accélération dans la rotation sont rigoureu-

sement représentés par la théorie, ou si quelque cause perturbatrice est venue altérer quantitativement le phénomène fondamental. Pour pouvoir apprécier ce dernier effet, une méthode plus précise était nécessaire.

Je dus renoncer à observer les coïncidences de deux pendules d'égale longueur, tournant en sens inverse, attendu que les périodes qui ramènent ces coïncidences auraient été beaucoup trop longues. Cette difficulté fut surmontée en prenant deux pendules dont les fils A, B différaient suffisamment en longueur pour qu'on pût observer, par exemple, quatre ou cinq coïncidences dans une période d'une heure ou une heure et demie. La *fig.* 1 représente l'installation donnée à nos appareils pour pouvoir observer les coïncidences.

Sur l'ancienne traverse Q, qui a servi à la suspension des fils dans mes premières expériences, je plaçai en équerre une deuxième poutre PP′ en chêne, dont la longueur, dirigée du nord au sud, était de 770 millimètres, la hauteur 160 millimètres, la largeur 100 millimètres.

A son extrémité boréale fut suspendu le fil A, dont la partie flexible fut réduite à $9991^{mm},3$ de longueur; je l'appellerai désormais le fil A′; une rallonge AA′ abaissait d'environ 1 décimètre le point d'attache S du fil. A l'extrémité australe fut placé le fil B, dont la longueur, non compris les parties engagées en S et *s*, était égale à $10035^{mm},2$.

La vis VT, qui terminait le fil A′, pénétrait dans l'intérieur du cylindre C d'environ 50 millimètres de plus que ne le faisait la vis analogue qui terminait le fil B, comme le montre la *fig.* 1. Les deux cylindres se trouvaient aussi sensiblement à la même hauteur au-dessus du parquet, et le mouvement d'horlogerie M pouvait facilement être transporté de l'un à l'autre, pour leur imprimer la rotation unique.

La distance horizontale qui séparait les fils était égale à 705 millimètres.

La distance du point d'attache au centre de gravité du cylindre était de $10216^{mm},2$ pour le pendule long (fil B), et de $10115^{mm},5$ pour le pendule court (fil A′).

Le fil A, *fig.* 1 et 2 (ancien fil occidental), fut placé au nord, et le fil B (ancien fil oriental) fut placé au sud. De la suspension supérieure

au centre du cylindre, on avait :

Pour le fil A..... $10115^{mm},5$,

Pour le fil B..... $10216^{mm},2$.

L'écartement des deux fils l'un de l'autre,

AS′ (*fig.* 1) ou AB (*fig.* 2) = 705 millimètres.

Alors, si A′ et B étaient mis en mouvement simultané, l'un dans la direction d'orient en occident, l'autre dans la direction d'occident en orient, et si, après l'observation des coïncidences, on recommençait en renversant les sens des deux mouvements, la durée des périodes qui ramenaient les coïncidences ne devait plus être la même, et ainsi l'effet de la rotation terrestre devait être mis facilement en évidence.

Soient A (*fig.* 2) le centre du cercle décrit par le pendule attaché à l'extrémité du fil A′; B le centre du cercle que décrit en sens inverse le pendule attaché à l'extrémité du fil B. Dans le plan vertical ABθ, qui contient les deux fils suspenseurs dans leur position de repos, plaçons un théodolite θ, dont l'axe optique sera exactement dirigé sur les fils A′, B, lesquels paraîtront se recouvrir exactement.

Lorsque les pendules traverseront simultanément le plan vertical AB, A′ arrivant en a lorsque B arrive en b, les deux fils traverseront ensemble le champ de la lunette et passeront ensemble par le fil vertical du réticule; une demi-oscillation après, le fil A′ sera en a' et le fil B en b', de sorte que les fils mobiles traverseront de nouveau le milieu du champ, mais suivant une direction inverse de la précédente. On dit alors qu'il y a *coïncidence*. L'inégalité des rotations détruit bientôt ces coïncidences, et, au bout de quelque temps, le pendule le plus rapide gagne une demi-oscillation, soit 180 degrés, sur le pendule le moins rapide; A′ arrivant en a, B arrive en b', alors les deux fils mobiles traversent en même temps le milieu du champ, et paraissent marcher à la rencontre l'un de l'autre : on dit alors qu'il y a *croisement*. Lorsque le pendule le plus rapide vient à gagner sur l'autre une deuxième demi-oscillation, la coïncidence se rétablit, puis un second croisement, et ainsi de suite.

Il convient, pour mieux juger soit des coïncidences, soit des croisements, de placer sur le diaphragme focal un réticule à cinq fils verticaux équidistants, d'adapter le tirage de la lunette du théodolite à la

vision distincte d'un objet placé en C, au milieu de la distance AB, afin que les images des deux fils soient sensiblement pareilles; enfin, la perception des fils mobiles aura toute la netteté désirable, s'ils se projettent sur le fond éclairé du ciel.

Avec les valeurs

$AB = 0^m,705$,
$C\theta = 13^m,6$, dans la direction du sud par rapport aux fils,
Diamètre de l'objectif. . . . . $= 0^m,034$,
Distance focale principale de l'objectif. $= 0^m,400$,
Pour $13^m,6$ de distance. . . . . $= 0^m,413$;

ces images, vues sur le fond du ciel, à travers la grande fenêtre nord de la salle de la Méridienne, offraient tout le degré de netteté désirable.

Le résultat de ces observations de coïncidences et de croisements consiste, en définitive, en ce que l'on reconnaît qu'au bout de n oscillations du pendule long, le pendule court, dont l'oscillation est la plus rapide, a gagné précisément une oscillation; de sorte que n fois la durée d'oscillation du premier égale $n+1$ fois la durée d'oscillation du second. Mais, après avoir déterminé ainsi la valeur des nombres n et $n+1$, il convient, pour plus de symétrie dans les formules, de considérer la somme de ces deux nombres que je nommerai s; ce nombre peut être fractionnaire, le retour des coïncidences n'ayant pas nécessairement lieu au bout d'un nombre entier d'oscillations : alors $\frac{s-1}{2}$ oscillations du pendule long équivaudront à $\frac{s+1}{2}$ du pendule court.

Soient t, t_w, t_e les durées d'oscillation du pendule long oscillant rectilignement, coniquement de l'ouest à l'est, coniquement de l'est à l'ouest; soient de même t', t'_w, t'_e les mêmes durées pour le pendule court.

La comparaison de t_w avec t'_e donnera l'équation

$$\frac{s-1}{2}\, t_w = \frac{s+1}{2}\, t'_e;$$

d'où, à cause des équations (1), (2), en posant, pour abréger,

$$\frac{\sin\lambda}{T} = \alpha, \tag{6}$$

on tire

$$(7)\qquad \left(\frac{1}{t}-\alpha\right)(s+1)=\left(\frac{1}{t'}+\alpha\right)(s-1).$$

Si maintenant l'on fait tourner les pendules en sens inverse, les deux durées se rapprocheront, les coïncidences reviendront à des intervalles plus éloignés; et si l'on nomme S la somme des deux nombres d'oscillations qui ramènent une coïncidence, on aura

$$(8)\qquad \left(\frac{1}{t}+\alpha\right)(S+1)=\left(\frac{1}{t'}-\alpha\right)(S-1).$$

Des équations (7) et (8) on tire

$$(9)\qquad \frac{\alpha}{S-s}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t'}-\frac{1}{t}\right)}{S+s}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}\right)}{2Ss}=\frac{\frac{1}{t'}}{2Ss+S+s}=\frac{\frac{1}{t}}{2Ss-S-s}.$$

L'équation (9) montre que l'on a

$$t\left(\frac{2Ss}{S+s}-1\right)=t'\left(\frac{2Ss}{S+s}+1\right),$$

et si l'on pose

$$(10)\qquad \frac{Ss}{\frac{1}{2}(S+s)}=\Sigma,$$

on aura

$$(11)\qquad \left(\frac{\Sigma-1}{2}\right)t=\left(\frac{\Sigma+1}{2}\right)t',$$

de sorte que Σ est la somme des deux nombres d'oscillation qui amèneraient une coïncidence entre les deux pendules débarrassés de l'effet de la rotation de la Terre.

On conclut de l'équation (10), que :

« Si, dans l'observation des coïncidences de deux pendules, la vi-
» tesse de rotation est altérée d'une part en plus et de l'autre en
» moins, d'une même quantité, et si l'altération se produit ensuite en
» sens inverse, la somme Σ des oscillations des deux pendules qui
» ramènerait les coïncidences, l'altération venant à cesser d'avoir
» lieu, est égale au carré de la moyenne géométrique des sommes
» d'oscillation correspondant aux deux genres d'altération divisé
» par leur moyenne arithmétique. »

Des équations (9) et (10) on tire

$$(12)\qquad \alpha = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\Sigma-1}\cdot\frac{S-s}{S+s} = \frac{1}{t'}\cdot\frac{1}{\Sigma+1}\cdot\frac{S-s}{S+s}.$$

Avec cette valeur de α, on trouve les équations suivantes :

$$(13)\quad \begin{cases} t_w = \dfrac{t(S+s)(\Sigma-1)}{(S+s)(\Sigma-1)-(S-s)}, & t'_w = \dfrac{t'(S+s)(\Sigma+1)}{(S+s)(\Sigma+1)-(S-s)}, \\[2ex] t_e = \dfrac{t(S+s)(\Sigma-1)}{(S+s)(\Sigma-1)+(S-s)}, & t'_e = \dfrac{t'(S+s)(\Sigma+1)}{(S+s)(\Sigma+1)+(S-s)}. \end{cases}$$

Ainsi, quoique les équations (7) et (8) ne suffisent pas pour déterminer les trois inconnues t, t', α, on voit, par les équations (12) et (13), que la connaissance de l'une des six quantités t, t', t_e, t_w, t'_e, t'_w suffira pour que le problème soit complétement résolu.

Dans les observations de coïncidence qui ont été faites par cette méthode, on a toujours déterminé simultanément les valeurs t_e et t_w; on en a conclu la durée t à très-peu près égale à $\frac{t_e+t_w}{2}$: substituant cette valeur de t dans les équations

$$(14)\qquad \alpha = \frac{S-s}{t(S+s)(\Sigma-1)};$$

$$(15)\qquad t_w - t_e = \frac{2t(S+s)(\Sigma-1)(S-s)}{(S+s)^2(\Sigma-1)^2-(S-s)^2},$$

on a pu déterminer α et comparer le nombre $t_w - t_e$ conclu de l'observation par la formule (15), avec le nombre théorique

$$\frac{2t_e t_w \sin\lambda}{T}.$$

En général, $(S-s)^2$ étant excessivement petit par rapport à $(S+s)^2(\Sigma-1)^2$, on peut, sans erreur appréciable, mettre l'équation (15) sous la forme

$$(16)\qquad t_w - t_e = \frac{2t(S-s)}{(S+s)(\Sigma-1)} = \frac{t(S-s)}{Ss-\frac{1}{2}(S+s)}.$$

On aurait de même

$$(17)\qquad t'_w - t_e = \frac{2t'(S-s)}{(S+s)(\Sigma+1)}.$$

On peut aussi exprimer α en fonction de $t+t'$, et l'on trouve alors facilement

$$\alpha = \frac{(S-s)4Ss}{(t+t')[4S^2s^2-(S+s)^2]} = \frac{2\Sigma(S-s)}{(t+t')(\Sigma^2-1)(S+s)},$$

et, si l'on néglige 1 devant Σ^2, ce qui est permis, vu le degré de précision auquel on peut espérer obtenir α, on aura très-simplement,

$$\alpha = \frac{1}{t+t'}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S}\right), \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned} t_w - t_e &= 2t^2\alpha = \frac{2t^2}{t+t'}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S}\right), \\ t'_w - t'_e &= 2t'^2\alpha = \frac{2t'^2}{t+t'}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S}\right). \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Corrections pour les amplitudes et pour l'ellipticité de l'orbite. — En vertu de l'accélération de vitesse due aux amplitudes, et de la variation de forme ou de position des orbites elliptiques, les durées de rotation sont altérées dans chaque mouvement; à la somme des durées observées depuis l'observation initiale jusqu'à l'observation finale, dans un temps de N oscillations, on doit ajouter le terme (*voyez* ci-dessus, p. 14)

$$C_f - C_i + t\,\Sigma\frac{R^2}{l^2},$$

et, en admettant que l'altération se soit faite d'une manière proportionnelle au temps, on a à ajouter aux durées t_w, t_e, t'_w, t'_e, des corrections que je représenterai par Δ_w, Δ_e, Δ'_w, Δ'_e, et dont le calcul s'opérera par la formule générale

$$\frac{1}{N}\left(C_f - C_i + t\,\Sigma\frac{R^2}{l^2}\right).$$

Ainsi les durées observées, au lieu d'être égales aux durées théoriques, auront pour valeur

$$t_w - \Delta_w, \quad t_e - \Delta_e, \quad t'_w - \Delta'_w, \quad t'_e - \Delta'_e.$$

Pour savoir comment ces altérations troublent le retour des coïncidences, reprenons la formule

$$(s-1)\,t_w = (s+1)\,t'_e,$$

où s représente la somme des oscillations qui ramèneraient les coïncidences dans des pendules à oscillations rigoureusement circulaires et infiniment petites. Faisons varier de quantités très-petites s, t_w et t'_e, et nommons Δ_s, Δ_w, Δ'_e les variations de s, t_w, t'_e.

Avant de différentier l'équation précédente, il convient de la mettre sous la forme

$$\log \frac{s+1}{s-1} = \log t_w - \log t'_e;$$

on trouve alors

$$-\frac{2\Delta_s}{s^2-1} = \frac{\Delta_w}{t_w} - \frac{\Delta'_e}{t'_e},$$

et, négligeant 1 devant s^2,

$$\Delta \frac{1}{s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_w}{t_w} - \frac{\Delta'_e}{t'_e}\right).$$

On trouverait de même

$$\Delta \frac{1}{S} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_e}{t_e} - \frac{\Delta'_w}{t'_w}\right),$$

et, par suite,

$$(19) \qquad \Delta\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_w}{t_w} + \frac{\Delta'_w}{t'_w} - \frac{\Delta_e}{t_e} - \frac{\Delta'_e}{t'_e}\right).$$

Telle est la correction qu'il faut introduire dans le second membre de l'équation (17), pour avoir la véritable valeur de α.

Avec une approximation moindre que celle de l'équation (19), mais qui sera habituellement suffisante, on aura

$$\Delta\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S}\right) = \frac{\Delta_w + \Delta'_w - \Delta_e - \Delta'_e}{t + t'},$$

et substituant cette valeur dans celle de α, on trouvera

$$(20) \qquad \alpha = \frac{1}{t+t'}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S}\right) + \frac{1}{(t+t')^2}(\Delta_w + \Delta'_w - \Delta_e - \Delta'_e).$$

Portant cette valeur en

$$t_w - t_e = 2t^2\alpha,$$

et remplaçant $\frac{2t}{t+t'}$ par $\frac{S+s+2}{S+s}$, on obtient la formule définitive

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} t_w - t_e = {} & \frac{t_w + t_e}{2} \cdot \frac{(S+s+2)(S-s)}{(S+s)Ss} \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{S+s+2}{S+s}\right)^2 \cdot (\Delta_w + \Delta'_w - \Delta_e - \Delta'_e), \end{aligned} \right.$$

laquelle m'a servi à calculer l'excès $t_w - t_e$.

Voici le tableau des observations qui ont été faites avec cet appareil.

Tableau des observations faites pour déterminer l'effet de la rotation terrestre sur le pendule conique par la méthode des coïncidences.

Observations du 23 Mai 1851			Observations du 25 Mai 1851.			Observations du 10 Juin 1851		
NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule,		NATURE de l'observation.	NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule,		NATURE de l'observation.	NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule,		NATURE de l'observation
long B	court A'		long B.	court A'.		long B.	court A'.	
1re série, mesure de s.			1re série, mesure de s.			1re série, mesure de s		
0,0	0,0	coïncidence.	0,0	0,0	croisement.	0,8	0,8	coïncidence.
103,0	103,5	croisement	104,3	104,8	coïncidence.	106,2	106,7	croisement.
207,5	208,5	coïncidence.	207,7	208,7	croisement.	206,8	207,8	coïncidence.
310,0	311,5	croisement.	312,5	314,0	coïncidence.	312,5	314,0	croisement.
415,4	417,4	coïncidence.	416,1	418,1	croisement.	413,0	415,0	coïncidence.
518,0	520,5	croisement.	520,6	523,1	coïncidence.	518,6	521,1	croisement
624,1	627,1	coïncidence.	623,6	626,6	croisement.	619,8	622,8	coïncidence.
»	»	»	728,5	732,0	coïncidence.	724,7	728,2	croisement.
»	»	»	830,8	834,8	croisement	826,2	830,2	coïncidence.
207,86 (p^le long) = 208,86 (p^le court)			207,86 (p^le long) = 208,86 (p^le court)			206,31 (p^le long) = 207,31 (p^le court)		
$s = 416,72$			$s = 416,72$			$s = 413,62$		
2e série, mesure de S.			2e série, mesure de S.			2e série, mesure de S		
0,0	0,0	croisement.	0,7	0,7	croisement.	0,3	0,3	croisement.
112,3	112,8	coïncidence.	109,3	109,8	coïncidence.	105,9	106,4	coïncidence
219,6	220,6	croisement.	218,8	219,8	croisement	215,0	216,0	croisement
329,2	330,7	coïncidence.	327,7	329,2	coïncidence.	321,3	322,8	coïncidence
436,6	438,6	croisement.	435,5	437,5	croisement.	429,0	431,0	croisement
»	»	»	545,7	548,2	coïncidence	537,4	539,9	coïncidence
»	»	»	654,1	657,1	croisement	648,0	651,0	croisement
»	»	»	764,0	767,5	coïncidence.	753,5	757,0	coïncidence
»	»	»	871,3	875,3	croisement	863,5	867,5	croisement
218,015 (p^le long) = 219,015 (p^le court)			217,89 (p^le long) = 218,89 (p^le court			215,965 (p^le long) = 216,965 (p^le court)		
$S = 437,03$			$S = 436,64$			$S = 432,93$		

Les valeurs moyennes des nombres n et $n+1$, qui servent à calculer s et S, ont été déduites des nombres de ce tableau, en comparant les intervalles des coïncidences entre elles, celle des croisements entre eux, et tenant compte, dans la moyenne générale, des différences de poids provenant des différences d'intervalles. Il peut arriver que l'époque d'un croisement ne tombe pas exactement au milieu de l'intervalle qui sépare les coïncidences; cela indique que l'axe optique de la lunette ne passait pas exactement par l'axe de rotation de l'un des deux fils : cette circonstance peut altérer un peu la durée de l'intervalle pour les coïncidences, à cause de la diminution des amplitudes; mais elle agit en sens inverse sur les croisements, de sorte que l'erreur résultante est très-sensiblement nulle. Lorsque la centralité de l'axe optique de la lunette, par rapport aux deux cônes décrits par les fils, a été convenablement réglée, cette petite anomalie a disparu.

Pour pouvoir déterminer la valeur de $t_w - t_e$, qui est l'inconnue principale de la question, il a fallu mesurer, au moins d'une manière approchée, les valeurs de t_w, t_e; on aurait pu le faire par des expériences préliminaires, mais on a préféré faire cette détermination simultanément à l'observation de s et de S; on trouvera ces valeurs, ainsi que celles de Δ_w, Δ'_w, Δ_e, Δ'_e, qui servent à corriger la valeur de $t_w - t_e$, dans le tableau suivant :

Tableau des éléments numériques servant à calculer $t_w - t_e$.

	23 MAI	25 MAI.	10 JUIN.
s	416,72	416,72	413.62
S	437,03	436,64	432,93
t_w	6^s,40744	6^s,40741	6^s,40768
t_e	6,40692	6,40685	6,40683
Δ_w	+ 0.000173	+ 0,000326	+ 0,000315
Δ'_w	+ 0,000317	+ 0,000289	+ 0,000362
Δ_e	+ 0,00252?	+ 0,000294	+ 0,000250
Δ'_e	+ 0.00112?	+ 0,000277	+ 0,000390
$t_w - t$	0,000716	0,000703	0,000693
Idem corrigé..	0,000779	0,000725	0,000710

On remarquera que, dans la série du 23 mai, les corrections Δ_e et Δ'_e sont très-incertaines, l'ellipticité correspondante n'ayant pas été observée et ayant dû se déduire d'observations analogues, et, de plus, les amplitudes entrant dans la correction Δ_e n'ayant pas été notées. L'erreur résultante peut altérer le second chiffre significatif de la valeur de $t_w - t_e$ d'une manière considérable. Si l'on rejette cette observation, on trouvera pour la moyenne générale,

$$t_w - t_e = 0{,}000717, \tag{22}$$

valeur qui coïncide parfaitement avec le nombre théorique.

Le procédé actuel est évidemment beaucoup plus précis que l'ancien, et la comparaison des résultats partiels avec les moyennes m'a démontré que l'erreur moyenne de passage est environ quatre fois moindre dans cette méthode; de sorte que le poids de l'observation serait ici seize fois plus grand, si là se trouvait la seule cause d'erreur de ce genre d'observations. Il est d'ailleurs évident que, si l'on veut tirer de cette méthode tout le parti possible, ce n'est pas en améliorant le mode d'observation des coïncidences que l'on y parviendra, mais bien plutôt en s'attachant à mesurer avec plus de précision que je ne l'ai fait, soit la valeur des amplitudes, soit la mesure de l'ellipticité de l'orbite. Il serait convenable que ces mesures pussent être prises, autant que possible, sans s'approcher des mobiles; car j'ai observé que les périodes de retour des coïncidences sont plus régulières si l'on évite de venir auprès d'eux.

J'ai voulu savoir si la présence du fer dans le corps oscillant pouvait modifier les résultats obtenus; en conséquence j'ai substitué au cylindre en cuivre un cylindre en fer placé à l'extrémité du fil le plus long. Le tableau suivant offre les résultats des deux observations faites dans ces conditions. Le nouveau cylindre en fer avait la même forme que le cylindre en cuivre, et on le remplissait de mercure; son poids total, 10500 grammes, différait à peine du poids de l'ancien cylindre.

Tableau des observations faites pour déterminer l'effet de la rotation terrestre, sur un pendule conique armé d'un cylindre de fer, par la méthode des coïncidences.

NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule, long.	NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule, coort.	NATURE de l'observation.	NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule, long.	NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule, court.	NATURE de l'observation.	ÉLÉMENTS NUMÉRIQUES servant a calculer $t_w - t_e$.	
24 juin, 1re série, mesure de s.			24 juin, 2e série, mesure de S.			24 juin.	
0,5	0,5	croisement.	0,8	0,8	coïncidence.	s	409,70
103,7	104,2	coïncidence.	107,0	107,5	croisement.	S	426,66
204,3	205,3	croisement.	214,0	215,0	coïncidence.	t_w	6,40822
308,0	309,5	coïncidence.	319,2	320,7	croisement.	t_e	6,40718
409,2	411,2	croisement.	426,8	428,8	coïncidence.	Δ_w	+ 0s,000328
512,0	514,5	coïncidence.	532,5	535,0	croisement.	Δ'_w	+ 0,000359
613,5	616,5	croisement.	639,4	642,4	coïncidence.	Δ_e	+ 0,000309
716,5	720,0	coïncidence.	»	»	»	Δ'_e	+ 0,000271
818,0	822,0	croisement.	»	»	»	$t_w - t_e$	0s,000623
204,35 (ple long) = 205,35 (ple court). $s = 409,70$			212,83 (ple long) = 213,83 (ple court) $S = 426,66$			Id. corrigé.	0,000677
7 juillet, 1re série, mesure de s.			7 juillet, 2e série, mesure de S.			7 juillet.	
0,6	0,6	croisement.	0,9	0,9	coïncidence.	s	408,74
103,2	103,7	coïncidence.	105,4	105,9	croisement.	S	426,96
204,6	205,6	croisement.	213,7	214,7	coïncidence.	t_w	6,40825
307,6	309,1	coïncidence.	318,7	320,2	croisement.	t_e	6,40786
408,2	410,2	croisement.	426,7	428,7	coïncidence.	Δ_w	0s,000322
511,3	513,8	coïncidence.	532,1	534,6	croisement.	Δ'_w	0,000299
612,5	615,5	croisement.	639,9	642,9	coïncidence.	Δ_e	0,000233
715,8	719,3	coïncidence.	744,5	748,0	croisement.	Δ'_e	0,000277
815,3	819,3	croisement.	852,5	856,5	coïncidence.	$t_w - t_e$	0s,000671
203,87 (ple long) = 204,87 (ple court) $s = 408,74$			212,98 (ple long) = 213,98 (ple court) $S = 426,96$			Id. corrigé.	0,000727
						Moyenne...	0s,000702

Ces observations donnent sensiblement le même résultat que les précédentes, et quant à l'écart qu'offre l'observation du 24 juin, on remarquera que, dans l'intervalle de temps écoulé entre la fin de la première série et le commencement de la deuxième, le cylindre en fer du long pendule a reçu un choc oblique qui a fortement tordu le fil, et qui a pu faire remonter le cylindre le long de l'écrou de la vis T, et diminuer ainsi la longueur de la suspension d'une très-petite fraction de millimètres. Il suffit d'admettre que la durée t_e a été ainsi diminuée de $0^s,00008$, soit de $\frac{1}{80000}$ de sa valeur absolue, ce qui correspond à une variation d'un quart de millimètre, dans la hauteur du cylindre, pour expliquer la différence observée.

Le cylindre en fer, vide, pesait 890 grammes, et était, par conséquent, bien plus lourd que le fil suspenseur, dont le poids n'était que de 65 grammes.

On peut conclure de là que la présence du fer ne paraît pas modifier d'une manière sensible le phénomène observé.

Si l'on divise par $2t^2$ les valeurs 0,000743 et 0,000717 que nous avons obtenues pour $t_w - t_e$, on aura la valeur de la constante α, ou de $\frac{\sin\lambda}{T}$. On trouve ainsi

$$\alpha = 0,00000906, \text{ méthode directe},$$
$$\alpha = 0,00000874, \text{ méthode des coïncidences};$$

et, en donnant à ce dernier nombre un poids trois fois plus considérable qu'au premier, ce qui ne paraîtra pas exagéré, on aura

$$(23) \qquad \begin{cases} \alpha = 0,00000882. \\ 2\pi\alpha = 0,0000554. \end{cases}$$

Ce dernier nombre exprime de combien la vitesse angulaire d'un pendule à oscillations coniques est altérée, à l'Observatoire de Paris, en plus ou en moins, par la rotation terrestre, pendant une seconde de temps, et, si on le multiplie par le nombre de secondes contenues dans l'arc égal au rayon, on trouvera

$$(24) \qquad 2\pi\alpha = 11'',43.$$

Il résulte donc de l'ensemble de ces observations que, pour des

pendules de 10 mètres de longueur, tournant coniquement d'occident en orient, la vitesse angulaire de rotation est retardée, à Paris, à raison de 11″,4 par seconde, et qu'elle est augmentée de la même quantité lorsque la rotation s'effectue d'orient en occident.

DÉTERMINATION DE LA LONGUEUR DU PENDULE A SECONDES PAR LES OSCILLATIONS CONIQUES.

Les observations précédentes peuvent servir à la détermination de la longueur du pendule à secondes que je nommerai λ, au moyen de la longueur l du pendule et de la durée t de l'oscillation. Nous avons vu, en effet, que la durée d'oscillation $6^s,40194$ correspondait à une longueur de 10200 millimètres mesurée à la température de 12°.5. Il convient d'abord de réduire cette longueur à 0 degré; car les divisions de la règle qui a servi à la mesure devaient valoir 1 millimètre à 0 degré, et $1 + 0,000011\,t$ à la température t, de sorte que la véritable longueur est $10201^{mm},4$.

Il faut ajouter à cette grandeur la quantité dont le centre d'oscillation (propre aux oscillations coniques) est abaissé au-dessous du centre de gravité; cette quantité, très-petite ici, a pour valeur approchée $0^{mm},1$, ce qui donne pour nouvelle longueur $10201^{mm},5$.

Enfin, il faut appliquer à la longueur totale l une double correction due à la pesanteur du fil de suspension; cette correction, dont je parlerai bientôt, a pour valeur

$$-21^{mm},1;$$

d'où enfin

$$l = 10180^{mm},4.$$

Quant à la durée t, elle doit être réduite de 6,40194 à 6,40178, à cause des $2^s,2$ d'avance diurne du chronomètre.

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation connue qui donne la longueur λ du pendule à secondes,

$$(25) \qquad \lambda = \frac{g}{\pi^2} = \frac{l}{(\frac{1}{2}t)^2},$$

on trouvera

$$\lambda = 993^{mm},63.$$

Ce nombre λ et la gravité correspondante sont un peu plus faibles que leurs valeurs bien connues pour l'Observatoire de Paris; mais nous n'avons pas encore tenu compte de la perte de poids dans l'air, qui diminue la gravité dans le rapport de la densité de l'air à celle du mobile, c'est-à-dire à très-peu près de $\frac{1}{10300}$, et comme, d'après les remarques faites à ce sujet par Poisson, cette correction doit, à cause de l'état de mouvement, être multipliée par le nombre $\frac{3}{2}$, on voit qu'il faudra augmenter g et λ de $\frac{1}{6900}$ de leur valeur et porter λ à la valeur

$$\lambda = 993^{\text{mm}},77. \tag{26}$$

La différence qui existe entre ce nombre et celui qu'a obtenu Borda [*] (993,86) correspond à une erreur de $0^{\text{mm}},9$ dans la mesure des longueurs 10036,5 et 10042 des fils d'acier employés à la suspension; elle peut s'expliquer par une petite inexactitude dans cette mesure même, que je n'avais point effectuée avec le degré de précision qu'il eût été nécessaire d'employer, si j'avais eu pour but de contrôler les observations de la gravité à l'Observatoire de Paris [**].

Il me reste à démontrer les formules qui doivent servir à corriger les observations de l'effet de la pesanteur du fil.

Le fil suspenseur agit, par son poids, de deux manières différentes: d'abord, comme corps pesant, il tend à élever le centre d'oscillation; ensuite, comme étant à la fois pesant et flexible, il se courbe suivant une ligne légèrement convexe vers le sol, et dont la dernière tangente étant prolongée jusqu'à la rencontre de l'axe de la rotation y détermine un point d'intersection qui doit être considéré comme le véritable point d'attache; cette dernière proposition est évidente.

---

[*] *Base du système métrique*, 3e volume, page 337.

[**] On devra remarquer que Borda et les physiciens qui ont mesuré la longueur du pendule simple par le procédé de la suspension filaire, n'ont pas tenu compte de la courbure, sous forme de chaînette, que prend le fil pendant les oscillations. A la vérité, il n'est pas évident que cette correction soit la même dans le cas des oscillations coniques et dans celui des oscillations planes dont Borda déterminait la durée; s'il en était ainsi, le nombre 993,86 devrait se réduire environ à $993^{\text{mm}},61$. On voit que cette correction est très-importante, et qu'il vaut la peine de rechercher si elle doit aussi s'appliquer au cas des oscillations planes.

Voyons d'abord quel sera l'effet de la pesanteur du fil sur le centre d'oscillation, les amplitudes étant supposées infiniment petites. Soit prise pour axe des z positifs la verticale qui descend du point de suspension, et soit pris son plan horizontal pour plan des x et des y. On trouve facilement que l'ordonnée z_1 du centre d'oscillation a pour valeur

$$z_1 = \frac{\int z^2\,dm}{\int z\,dm}, \tag{27}$$

dm étant un des éléments de masse du système oscillant, et les deux intégrales étant étendues à tout le système. Si donc la masse oscillante se compose d'un fil non pesant, portant à son extrémité inférieure un corps de masse M symétrique par rapport au plan horizontal mené par son centre de gravité, et si l'on nomme l la distance de ce centre au point d'attache, on aura, en posant $z = l + \zeta$,

$$\int z\,dm = l\mathrm{M},$$
$$\int z^2\,dm = l^2\mathrm{M} + \int \zeta^2\,dm,$$
$$z_1 = l + \frac{\int \zeta^2\,dm}{l\mathrm{M}};$$

la quantité $\frac{\int \zeta^2\,dm}{l\mathrm{M}}$ représentera la quantité dont le centre d'oscillation est abaissé au-dessous du centre de gravité; j'ai déjà dit que, dans mes expériences, sa valeur était $0^{\mathrm{mm}},1$.

Si maintenant un fil pesant homogène, de longueur l_0, s'étend à partir du point de suspension jusqu'à la masse M, en nommant s sa section, ρ sa densité, m sa masse totale, le numérateur du second membre de l'équation (27) augmentera de

$$\int z^2 \rho\,dx\,dy\,dz = \int z^2 \rho s\,dz = \tfrac{1}{3} l_0^3 \rho s = \tfrac{1}{3} l_0^2 m,$$

le dénominateur augmentera de

$$\int z\rho\,dx\,dy\,dz = \int \rho s\,dz = \tfrac{1}{2} l_0^2 \rho s = \tfrac{1}{2} l_0 m;$$

d'où l'on voit qu'il faudra, pour tenir compte du poids du fil, multiplier z_1 par

$$1 + \frac{1}{3}\frac{l_0^2 m}{l^2 \mathrm{M}},$$

et le diviser par

$$1 + \frac{1}{2}\frac{l_0 m}{l M},$$

et, comme les termes qui suivent l'unité sont très-petits, la correction résultante sera, à cause de $z_1 = l$, à fort peu près égale à

$$+ \frac{1}{3}\frac{l_0^2 m}{l M} - \frac{1}{2}\frac{l_0 m}{M} = -\frac{1}{6}\frac{ml}{M}\left(1 + 2\frac{l - l_0}{l}\right)\left(1 - \frac{l - l_0}{l}\right),$$

et, lorsque la longueur l_0 sera à fort peu près égale à l, ce qui arrivera généralement, la correction se réduira à

$$(28) \qquad -\frac{m(2l - l_0)}{6M}.$$

Je considère maintenant que le fil est flexible, et, comme son diamètre est petit et que la flexion est peu considérable, on peut faire abstraction de la rigidité et supposer le fil parfaitement flexible; il prendra donc la forme d'une chaînette, dont la courbure toutefois sera modifiée par la force centrifuge provenant de la rotation à laquelle il est soumis.

Soient O le point d'attache (*fig.* 4), P le centre de gravité de la masse M du mobile, OP le fil que je suppose prolongé jusqu'en P; prenons P pour origine des coordonnées, Pz pour axe des z, Px pour axe des x; posons Pp = R, et continuons à nommer l la longueur OP du fil, s sa section, ρ sa densité, m sa masse, et à supposer les oscillations infiniment petites.

En appelant x, z les coordonnées d'un point m de la courbe, la tension en m sera évidemment

$$Mg + mg.\frac{z}{l},$$

et, en la multipliant par l'angle de contingence $-d.\frac{dx}{dz}$, on aura la force moléculaire qui s'oppose à la courbure du fil. D'autre part, la force horizontale qui tire l'élément $d\sigma$ vers l'axe sera la composante normale au fil de la pesanteur de l'élément diminuée de l'effet de la force centrifuge correspondant à une vitesse de rotation ω, soit, à fort peu près,

$$\left[g\frac{dx}{d\sigma} - \omega^2(R - x)\frac{dz}{d\sigma}\right]\rho s\, d\sigma;$$

or on peut, à cause de la très-faible flexion, et comme OP est presque rectiligne, supposer dans cette expression $\frac{dx}{d\sigma}$ constant; de plus, au point le plus bas P, la force centrifuge et la pesanteur se contrebalancent exactement, puisque le point P ne s'écarte ni ne se rapproche de l'axe; on aura donc très-sensiblement

$$g\frac{dx}{d\sigma} = \omega^2 \mathrm{R}\frac{dz}{d\sigma},$$

et faisant, par suite de la petitesse de l'angle du fil avec la verticale,

$$d\sigma = dz,$$

il viendra

$$-g\left(\mathrm{M} + m\frac{z}{l}\right) d.\frac{dx}{dz} = \omega^2 x \rho s\, dz,$$

et, divisant par

$$-\rho s\, lg = -mg.$$

on aura

$$\left(\frac{\mathrm{M}}{m} + \frac{z}{l}\right) d.\frac{dx}{dz} = -\frac{\omega^2}{gl} x\, dz = -\frac{dx}{d\sigma}\cdot\frac{x}{\mathrm{R}\, l}\, dz.$$

Mais, puisque OP est presque rectiligne, on a, à fort peu près,

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{p\mathrm{P}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{R}}{l};$$

substituant et multipliant par $\frac{l}{dz}$, on trouve

$$\left(\frac{\mathrm{M}}{m} l + z\right)\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{x}{l};$$

c'est l'équation différentielle de la courbe OP, cette courbe étant supposée (ce qui a lieu en effet) différer très-peu d'une ligne droite.

Dans la pratique, $\frac{\mathrm{M}}{m}$ est un nombre considérable (environ 160 dans mes expériences), et l'on peut, sans erreur sensible, supposer (à $\frac{1}{300}$ près)

$$\frac{\mathrm{M}}{m}\cdot l + z = \frac{\mathrm{M}}{m}\cdot l + \tfrac{1}{2} l,$$

ce qui réduit l'équation à

$$\left(\frac{\mathrm{M}}{m} + \tfrac{1}{2}\right)\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{x}{l},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{2M+m}{2m}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = -\frac{x^2}{l^2} + \text{constante}.$$

Soit donc nommé φ l'angle O′Pp; on aura, pour l'équation différentielle de premier ordre de la courbe,

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \tang^2\varphi - \frac{x^2 . 2m}{(2M+m)l^2},$$

et en changeant dans le second membre x^2 en $z^2 \tang^2\varphi$, ce qui n'occasionne aucune erreur sensible, il viendra

$$\frac{dx}{dz} = \tang\varphi . \sqrt{1 - \frac{2mz^2}{(2M+m)l^2}}.$$

Enfin, à cause de la petitesse du facteur $\frac{2m}{2M+m}$, on peut extraire la racine par approximation, et écrire

$$dx = dz \tang\varphi \left[1 - \frac{mz^2}{(2M+m)l^2}\right],$$

$$x = z \tang\varphi \left[1 - \frac{mz^2}{3(2M+m)l^2}\right].$$

Je n'ajoute pas de constante, puisque la courbe passe par l'origine; on voit que c'est une parabole du troisième ordre, et que sa courbure est nulle dans le voisinage de l'origine, c'est-à-dire dans la partie la plus basse du fil. Il résulte de là qu'on peut toujours, quoique le fil ne vienne pas en général jusqu'en P, le supposer prolongé jusque-là, pourvu que l'on remplace sa masse m par $\frac{ml}{l_0}$, l_0 étant la longueur *effective* du fil.

Si l'on fait, dans la formule ci-dessus,

$$z = l, \quad x = R,$$

il viendra

$$R = l \tang\varphi \left(1 - \frac{m}{6M+3m}\right),$$

$$pO' = l\left(1 - \frac{m}{6M+3m}\right);$$

d'où

$$Oo' = \frac{ml}{6M+3m},$$

et si l'on y remplace m par $\frac{ml}{l_0}$, mais seulement au numérateur, on aura enfin

$$(29) \qquad Oo' = \frac{m(2l - l_0)}{6M + 3m}.$$

En réunissant cette correction à la précédente, donnée par la formule (28), la correction totale due au poids du fil deviendra

$$-\frac{m(2l - l_0)}{6M} - \frac{m(2l - l_0)}{6M + 3m};$$

d'où l'on voit que ces deux corrections sont presque égales entre elles, et qu'on peut les embrasser en un seul terme sous la forme

$$-\frac{2l - l_0}{3}\,\frac{m}{M + \frac{1}{4}m}.$$

Dans nos expériences, on avait, pour les valeurs moyennes de l, l_0, m, M, sur les fils A′ et B,

$$l = 10193^{mm},$$
$$l_0 = 10032^{mm},5,$$
$$m = 64^{gr},89.$$
$$M = 10600^{gr};$$

ainsi la correction de longueur du fil était égale à $-21^{mm},1$, comme nous l'avions annoncé.

On voit qu'elle est sensiblement proportionnelle au carré de la longueur du fil; il y aurait donc de l'avantage, si l'on voulait obtenir par ce procédé la longueur du pendule simple, à se servir d'un pendule moins long, circonstance qui faciliterait aussi la mesure exacte de sa longueur totale.

Sur les irrégularités qui se produisent dans le mouvement de rotation du pendule conique libre.

Dans les conditions où les expériences précédentes ont été faites, l'amplitude des oscillations, ou, en d'autres termes, le rayon de la trajectoire décrite par le mobile, allait en diminuant avec lenteur, et

cette variation représentait la loi du ralentissement de la vitesse, effet combiné de la résistance de l'air et des frottements produits au point de suspension supérieure du fil.

L'observation de plusieurs séries de ces amplitudes décroissantes m'a permis de déterminer la loi empirique de ce décroissement entre les valeurs 300 millimètres et 100 millimètres du rayon R de l'orbite. En examinant ces séries, on y reconnaît facilement que la résistance n'est proportionnelle ni à la simple vitesse du mobile, ni au carré de cette vitesse, mais plutôt à une puissance intermédiaire, laquelle peut être exprimée, à fort peu près, par la fraction $\frac{16}{10}$. D'après ces mêmes expériences, j'ai construit une Table des valeurs corrélatives du rayon R et du temps t écoulé depuis l'origine du mouvement, celui-ci étant supposé commencer à l'époque où R est égal à 295 millimètres; mais, comme cette Table n'aurait pas un grand intérêt pour les physiciens, je me bornerai à donner la formule par laquelle je suis parvenu à la représenter à très-peu près. Cette formule est la suivante :

$$(1) \qquad R^{-0,6} = c + c't,$$

c et c' étant deux constantes convenablement choisies. On peut mettre cette équation sous la forme

$$\log R = -\tfrac{10}{6}\log(c + c't).$$

Dans le cas actuel, R étant exprimé en millimètres, le temps t en minutes, la formule devient

$$(2) \qquad \log R = -\tfrac{10}{6}\log(0,03297 + 0,000186\,t).$$

Elle est valable depuis $t = 0$, $R = 295^{mm}$, jusqu'à $t = 160^{m}$, $R = 103^{mm},6$. Entre ces limites, les valeurs qu'elle fournit pour R ne s'écartent pas de plus de $1^{mm},5$ des nombres moyens déduits des observations.

Réciproquement, ayant observé l'amplitude R et l'amplitude r à deux époques distantes d'un nombre de minutes égal à θ, on vérifiera notre formule générale en substituant les valeurs de ces quantités dans l'équation

$$(3) \qquad \theta = \frac{5555}{r^{0,6}} - \frac{5555}{R^{0,6}}.$$

Il faut remarquer que les équations (2) et (3) ne s'appliquent réellement qu'au pendule de 10216 millimètres de longueur; pour le pendule raccourci ayant pour longueur 10116 millimètres, la constante 5555 doit devenir un peu moindre; mais la différence n'est guère sensible dans le degré de précision de mes observations.

Comme le coefficient constant de l'équation (3) peut se déduire de chaque observation isolée, en divisant la durée θ par la valeur de $\frac{1}{r^{0,6}} - \frac{1}{R^{0,6}}$, il ne sera pas sans intérêt de voir d'un seul coup d'œil les diverses valeurs que lui assignent les observations; c'est ce que montre le tableau suivant :

Valeurs de $\frac{1}{c'}$, d'après les observations.

JOUR.	CIRCONSTANCES.	VALEUR de la constante $\frac{1}{c'}$.		JOUR.	CIRCONSTANCES.	VALEUR de la constante $\frac{1}{c'}$.	
1851.				1851.			
5 mai.	Fil A. E. à O. par le sud	5110	5132	24 juin.	Fil B. E. à O. par le sud.	6031	5931
	O. à E.	5155		*Id.*	O. à E.	5832	
9 mai.	Fil A. O. à E.	5164	5164	7 juill.	Fil B. E. à O	5648	5801
11 mai.	Fil A. E. à O.	5410	5432	*Id.*	O. à E.	5954	
	O. à E.	5454		25 mai.	Fil A'. E. à O.	5590	5496
16 mai.	Fil A. O. à E.	5500	5500		O. à E.	5402	
18 mai.	Fil A. E. à O	5628	5628	10 juin.	Fil A'. E. à O	5682	5420
16 mai.	Fil B. O. à E.	5596	5596		O. à E.	5158	
18 mai.	Fil B. E. à O	5505	5505	24 juin.	Fil A'. E. à O.	5495	5477
25 mai.	Fil B. E. à O.	5595	5695		O. à E.	5460	
	O. à E.	5795		7 juill.	Fil A'. E. à O	5730	5653
10 juin.	Fil B. E. à O.	5033	5415		O. à E.	5577	
	O. à E.	5797					

Pour chacun des trois fils A, B, A' successivement employés, la valeur de $\frac{1}{c'}$ a été généralement croissante, à mesure que l'on a fait avec ce fil de nouvelles séries. La seule manière d'expliquer ce fait me paraît être celle qui consiste à admettre qu'à la longue le frottement produit par les flexions alternatives du fil, en son point de suspension, va en diminuant, le fil devenant de plus en plus facile à fléchir.

Il est d'ailleurs probable que j'aurais obtenu des nombres plus concordants que ceux du tableau précédent, si les observations avaient

en précisément pour but d'obtenir la loi de la variation des amplitudes.

Je terminerai par quelques détails sur le mode de dégénérescence des trajectoires en ellipses. Le tableau suivant présente, pour mes diverses expériences, la valeur des demi-diamètres des orbites dans les quatre azimuts principaux, est-ouest, nord-sud, sud-est-nord-ouest et sud-ouest-nord-est; 1° dans l'état initial, immédiatement avant l'observation; 2° dans l'état final, vers la fin de la série. Une colonne particulière donne l'intervalle de temps écoulé entre ces deux états.

De ces quatre observations, on peut déduire les éléments de l'orbite. Les deux dernières colonnes du tableau donnent ces éléments pour l'orbite finale, qui est la plus importante à déterminer. Pour déterminer le grand axe et le petit axe, en nommant R, R′, R″, R‴ [*] les rayons vecteurs de l'orbite, comptés vers le nord, le nord-ouest, l'ouest et le sud-ouest, et supposant l'ellipse peu différente d'un cercle, j'ai trouvé que l'on pouvait exprimer les axes par la formule

$$\left(\frac{R+R''}{2}+\frac{R'+R'''}{2}\right)\pm\sqrt{(R-R'')^2+(R'-R''')^2},$$

le signe + correspondant au grand axe, et le signe − au petit axe. Le rapport de ces deux expressions donne le nombre inscrit dans la dernière colonne du tableau.

Quant à la direction du grand axe, on sait d'avance dans quels quadrants il est situé.

S'il est situé dans le quadrant nord-est-sud-ouest, on écrira

$$\text{Azimut grand axe} = \text{sud}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{arc tang} = \frac{R'''-R'}{R-R''}\right)\text{ vers l'ouest.}$$

S'il est situé dans le quadrant sud-est-nord-ouest, on écrira

$$\text{Azimut grand axe} = \text{sud}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{arc tang} = \frac{R'-R'''}{R-R''}\right)\text{ vers l'est,}$$

l'angle arc tang se comptant de 0 degré à 180 degrés, et l'angle $\frac{1}{2}$ arc tang de 0 degré à 90 degrés.

---

[*] L'équation de l'ellipse prouve que ces quatre grandeurs sont liées entre elles par la relation

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}=\frac{1}{R''^2}+\frac{1}{R'''^2}.$$

Formes initiale et finale des orbites du pendule conique.

JOUR.	CIRCONSTANCES.		ORBITE INITIALE. valeur de R.				ORBITE FINALE, valeur de r.				DURÉE	ORBITE FINALE	
			S.-N.	S.-E.-N.-O.	E.-O.	S.-O.-N.-E.	S.-N.	S.-E.-N.-O.	E.-O.	S.-O.-N.-E.	θ	Direction du grand axe	Rapport des deux axes.
			R.	R'.	R''.	R'''.	R.	R'.	R''.	R'''.			
1851.			mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	m	° ′	
5 mai.	Fil A. Occid.	E. à O par le S.	315,5	312,0	311,0	314,0	126,0	118,5	122,0	132,0	120	S.36.44 O.	1,12 : 1
	Fil A.	O. à E. par le S.	309,0	308,5	306,7	308,5	109,5	106,0	134,7	132,5	125	S.65. 1 O.	1.38
9 mai.	Fil A.	O. a E.	305,5	307,5	307,7	307,5	103,5	105,5	134,5	136,0	126	S.68.10 O.	1,43
11 mai	Fil A.	E. à O.	312,5	314,5	312,5	312,0	129,0	111,0	117,0	138,5	128	S.36.53 O.	1,28
		O. à E.	315,0	315,5	312,7	313,5	111,0	109,5	137,2	142,0	128	S.64.26 O.	1,41
16 mai.	Fil A.	O. à E.	237,5	236,0	235,2	236,5	127,0	123,0	120,5	125,0	98	S. 8.30 O.	1.06
18 mai.	Fil A.	E. à O.	229,5	232,0	230,5	230,5	122,0	125,5	122,7	120,5	99	S.65. E.	1.06
	Fil long.												
16 mai.	Fil B. Oriental.	O à E.	246,0	243,5	241,2	243,0	136,2	125,8	117,8	125,2	100	S. 0.45 E.	1.16 : 1
18 mai.	Fil B. Oriental.	E. à O.	217,0	214,0	215,0	216,0	116,5	123,0	118,5	110,0	97	S.49.20 E.	1.12
20 mai.	Fil B. Austral.	E. à O.	201,0	205,5	202,5	197,0	111,5	113,5	107,0	105,0	103	S.31. 3 E.	1,09
		O. à E.	193,0	190,0	188,0	191,0	120,5	114,0	107,2	113,5	90	S. 1. 0 E.	1,13
10 juin.	Fil B. Austral.	E. à O.	226,5	230,5	235,0	231,5	116,5	131,5	121,0	109,5	93	S.55.46 E.	1.22
		O. à E.	197,5	195,5	191,8	194,0	122,5	114,0	108,5	113,0	92	S. 2. 0 E.	1.13
24 juin.	Fil B. Austral.	E à O.	195,0	191.0	189,7	194,5	119,0	124,0	123.7	121,0	81	S.73.52 E.	1.05
		O. à O.	199,5	200,5	208,2	206,0	121,0	111,0	111,9	120,8	96	S.22.15 O.	1,13
7 juill.	Fil B. Austral	E. à O.	192,0	188,0	188,2	191,5	106,5	113,5	112,0	105,0	102	S.61.24 E.	1.096
		O. à E.	213,5	216,5	217,5	214,5	124,0	116,5	114,2	120,0	95,5	S. 9.54 O.	1,09
	Fil court.												
25 mai.	Fil A'. Boréal	E. à O.	209,5	210,5	208,5	208,5	105,0	113,0	112,2	104,5	109	S.65. 8 E.	1,11 : 1
		O. à E.	219,5	221,0	222,5	222,0	104,0	98,5	90,7	93,0	136,5	S.11.22 E.	1,16
10 juin.	Fil A'.	E. à O.	230,5	232,5	233,2	232,0	105,0	115,0	118,2	106,5	120	S.44. E.	1,06
		O. à E.	246,0	248,0	244,3	243,5	106,5	109.0	106,2	103,0	124	S.73.40 E.	1,15
26 juin.	Fil A'.	E. à O.	206,5	205,5	213,0	213,0	101,0	111,5	111,7	102,5	111	S.69.42 E.	1,14
		O. à E.	202,0	202,5	195,7	198,7	110,5	109,5	102,0	102,5	105	S.19.44 E.	1,11
7 juill.	Fil A'.	E. à O.	213,0	219,0	221,5	215,5	107,5	114,0	111.7	105,5	115	S.58.18 E.	1,09
		O. à E.	194,5	193,5	193,2	195,0	104,0	102,0	96,0	99.0	115	S.10.18 E.	1.09

Voici les remarques auxquelles conduit l'inspection de ce tableau, et celles que j'ai eu l'occasion de faire pendant la durée des expériences.

Tant que l'on se sert du même fil et que la rotation est de même sens, l'orbite supposée primitivement circulaire a une tendance à se changer en une ellipse dont le grand axe offre une direction déterminée. La forme légèrement elliptique que peut avoir l'orbite initiale ne trouble pas sensiblement ce résultat. Si l'ellipticité de l'orbite initiale était inverse de celle que doit avoir l'ellipse finale, l'orbite variable commencerait d'abord par arriver à la forme circulaire ou sensiblement circulaire, circonstance qui retarderait la transformation en ellipse finale. C'est ce qui a été surtout sensible dans la rotation du fil B d'occident en orient, observée le 7 juillet. Si, au contraire, l'orbite initiale avait une ellipticité analogue de position à l'ellipticité finale, cette circonstance favoriserait son prompt établissement.

On voit ainsi que, pour un même fil, la diminution des amplitudes ne se fait pas avec la même rapidité pour les différents rayons vecteurs de l'orbite. Il est deux positions rectangulaires pour lesquelles la diminution est à son maximum dans l'une et à son minimum dans l'autre.

Si l'on fait tourner le même fil dans le sens inverse, la position du grand axe de l'ellipse finale se déplace. Un défaut d'horizontalité dans la plaque de suspension peut aussi modifier cette position, et faire dégénérer plus rapidement l'orbite en une ellipse sensiblement allongée. Ainsi, dans les observations du fil A, d'occident en orient, les 5, 9 et 11 mai, le grand axe de l'orbite finale tendait à se diriger au S. 60° O.; mais, après le redressement de la plaque de suspension, le grand axe s'est dirigé au S. 15° O. Pour les rotations d'orient en occident, la différence a été encore plus considérable.

En général, lorsqu'on change le sens de la rotation, la position normale du grand axe marche dans le sens de l'ancienne rotation.

Ainsi, pour le fil A, avant la rectification de la suspension qui a eu lieu le 13 mai, dans la rotation de l'est à l'ouest par le sud, le grand axe était situé au S. 35° O.; en renversant la rotation, il a rétrogradé de 25 degrés et passé au S. 60° O.

Pour ce même fil A, après la rectification de la suspension, le grand

axe, situé au S. 46° E., lorsque la rotation avait lieu de l'est à l'ouest, a passé au S. 15° O.; rétrogadation, 61 degrés pour le sens de la nouvelle rotation.

Pour le fil B, dans les mêmes conditions, S. 50° E., et ensuite S. 5° E.; la rétrogradation est de 55 degrés.

Enfin, pour le fil A′, les deux positions du grand axe sont S. 64° E. et S. 18° E.; rétrogradation de 46 degrés.

Ces résultats semblent indiquer une notable influence exercée par la pièce de suspension; l'état moléculaire des fils, près de la suspension, semble, au contraire, avoir une faible influence, les trois fils ayant donné sensiblement les mêmes résultats.

La forme du mobile n'a pu d'ailleurs avoir aucune influence appréciable; les cylindres pesants étaient parfaitement tournés, ainsi que toutes les pièces de la suspension inférieure, et la résistance de l'air devait ainsi être constante dans toutes les directions azimutales.

J'ai eu aussi l'occasion de reconnaître que les courants d'air, soit accidentels, soit déterminés par l'approche de l'observateur, pouvaient troubler un peu le mouvement. C'est surtout dans l'observation des coïncidences que j'ai pu vérifier ce fait; car, lorsque je me bornais à les noter de loin, en les observant au théodolite, sans approcher des appareils, les périodes de retour étaient plus régulières que si j'allais, après chaque croisement ou coïncidence, mesurer les rayons vecteurs des orbites, ce qui exigeait un séjour de quelques minutes auprès des pendules. Ces perturbations irrégulières peuvent expliquer, au moins en partie, les différences de forme qu'offrent d'un jour à l'autre les ellipses finales, après des rotations du même fil dirigées dans le même sens.

Je n'ai pas remarqué que les grands axes des ellipses eussent un déplacement lent, dans le sens du mouvement diurne, c'est-à-dire d'orient en occident, comme on pouvait l'inférer à priori du phénomène de déviation observé par M. Foucault; il est à croire que l'action de la Terre se borne à déplacer dans ce sens, d'un petit nombre de degrés, la position d'équilibre que la suspension tend à donner au grand axe, et que cette déviation, *étant sensiblement constante* dans toutes les séries d'observations du même pendule, reste ainsi inaperçue.

Il est inutile d'insister davantage sur des sujets qui n'ont fixé mon attention que d'une manière secondaire. Je pense toutefois que les remarques précédentes pourront ne pas être inutiles à la personne qui désirerait reprendre ces expériences, ou traiter directement la question de la diminution des amplitudes et celle de la rotation lente des axes des orbites pendulaires.

Note sur une formule de Lagrange, relative au mouvement pendulaire.

Mon édition de la *Mécanique analytique* (Paris, 1815, in-4°), renfermant un grand nombre de fautes typographiques, je vais reprendre les calculs de Lagrange à la page 197 du tome II [*].

Lagrange veut calculer l'angle de rotation φ du pendule autour de la verticale, et il écrit que : α et β étant les amplitudes maximum et minimum, ψ l'amplitude variable avec le temps, et σ un angle auxiliaire donné par la formule

$$\cos\psi = \cos\alpha \sin^2\sigma + \cos\beta \cos^2\sigma,$$

l'on aura

$$d\varphi = \frac{\sqrt{\varkappa}\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}\,\frac{d\sigma}{(1+\cos\psi)\Sigma} + \frac{\sqrt{\varkappa}\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}\,\frac{d\sigma}{(1-\cos\psi)\Sigma}.$$

On a d'ailleurs

$$\varkappa = \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2+4\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta},$$

$$\Sigma = \sqrt{1+\varkappa(\cos\beta-\cos\alpha)\cos 2\sigma}.$$

Il s'agit d'intégrer de $\sigma = 0$ à $\sigma = \frac{\pi}{2}$, ou, ce qui revient au même, de $\psi = \alpha$ à $\psi = \beta$, en tenant compte des termes du second ordre en α, β, et négligeant ceux du quatrième ordre. Le calcul du premier des deux termes qui composent la valeur de $d\varphi$ n'offre aucune diffi-

---

[*] *Mécanique analytique*, édition Courcier, 1811, section VIII, chapitre II, article 16.

culté; on peut poser

$$\varkappa = \tfrac{1}{4}, \quad \Sigma = 1, \quad 1 + \cos\psi = 2, \quad \sqrt{\cos\alpha + \cos\beta} = 2, \quad \sin\alpha \sin\beta = \alpha\beta;$$

on trouve alors, pour ce premier terme,

$$\tfrac{1}{4}\alpha\beta\, d\sigma,$$

et, intégrant,

$$\frac{\pi}{2}\frac{\alpha\beta}{4}.$$

Le calcul du second terme est plus compliqué, parce que le dénominateur renferme le facteur $1 - \cos\psi$, qui est lui-même du second ordre.

Faites, avec Lagrange,

$$\frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{2 + 4\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta} = \sin 2\gamma,$$

$$\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{2 - \cos\beta - \cos\alpha} = \sin 2\nu;$$

vous aurez

$$\frac{1}{1 - \cos\psi} = \frac{2}{(2 - \cos\alpha - \cos\beta)\cos^2\nu\,(1 + \tang^2\nu - 2\tang\nu\cos 2\sigma)},$$

$$\frac{1}{(1 - \cos\psi)\Sigma} = \frac{2}{(2 - \cos\alpha - \cos\beta)\cos^2\nu\cos\gamma}\left[A'' + B''\cos 2\sigma + C''\cos 4\sigma\right],$$

on, plus simplement, en supprimant les termes en $\cos 2\sigma$, $\cos 4\sigma$, lesquels doivent disparaître par l'intégration,

$$\frac{1}{(1 - \cos\psi)\Sigma} = \frac{2A''}{(2 - \cos\alpha - \cos\beta)\cos^2\nu\cos\gamma} = \frac{2(A + B\tang\nu + C\tang^2\nu + \ldots)}{(2 - \cos\alpha - \cos\beta)\cos^2\nu\cos\gamma\,(1 - \tang^2\nu)}.$$

Dans cette formule, on a d'ailleurs

$$A = 1 + \tfrac{1}{4}\tang^2\gamma \ldots,$$

$$B = -\tang\gamma - \ldots,$$

$$C = \tfrac{3}{4}\tang^2\gamma + \ldots,$$

ce qui change le terme à calculer en

$$\frac{\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta\, 2\, d\sigma\,(1 + \tfrac{1}{4}\tang^2\gamma - \tang\gamma\tang\nu + \tfrac{3}{4}\tang^2\gamma\tang^2\nu + \ldots)}{\sqrt{2 + 4\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta}\,(2 - \cos\alpha - \cos\beta)\cos\gamma\cos^2\nu\,(1 - \tang^2\nu)}.$$

En intégrant de $\sigma = 0$ à $\sigma = \frac{\pi}{2}$, ce terme devient

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2-\cos\alpha-\cos\beta}\cdot\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{2+4\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta}}\,\frac{1}{\cos\gamma}\cdot\frac{1}{\cos 2\nu}$$
$$\times\left(1+\tfrac{1}{4}\tang^2\gamma-\tang\gamma\tang\nu+\tfrac{3}{4}\tang^2\gamma\tang^2\nu\ldots\right.$$

Si l'on néglige les quantités du quatrième ordre en α, β, le premier facteur aura pour valeur

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\left[1-\frac{\alpha^4+\beta^4+4\alpha^2\beta^2}{12(\alpha^2+\beta^2)}\right];$$

le deuxième facteur sera

$$\frac{\pi}{2}\left[1+\tfrac{3}{16}(\alpha^2+\beta^2)\right];$$

le troisième facteur sera

$$\frac{1}{\cos\gamma}=1;$$

le quatrième facteur sera égal à

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\left[1-\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{24(\alpha^2+\beta^2)}\right];$$

le cinquième facteur sera égal à

$$1-\frac{\alpha^2-\beta^2}{16}\sqrt{\frac{1-\cos 2\nu}{1+\cos 2\nu}}=1-\frac{(\alpha-\beta)^2}{16}.$$

Le produit total sera donc

$$\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\alpha\beta}{8}\right),$$

et, en lui ajoutant $\frac{\pi}{2}\frac{\alpha\beta}{4}$, on trouvera

$$\Phi=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3\alpha\beta}{8}\right);$$

Φ étant la différence des valeurs de la variable φ, entre les limites $\psi=\alpha$ et $\psi=\beta$.

Lagrange a trouvé

$$\Phi=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta};$$

son erreur provient de ce que, dans le calcul du second terme de $d\varphi$, il a écrit, par mégarde, au dénominateur, $1 + \tang^2 \nu$ au lieu de $1 - \tang^2 \nu$, erreur qui a fait disparaître le facteur $\frac{1}{\cos 2\nu}$, et, par cette suppression, le facteur $\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$ provenant de $\frac{\sin\alpha \sin\beta}{2 - \cos\alpha - \cos\beta}$ s'est trouvé introduit dans la valeur de Φ.

On peut s'étonner que Lagrange n'ait pas reconnu une telle erreur; car la formule

$$\Phi = \frac{\pi\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

donne pour l'orbite du mobile, comme Lagrange en fait lui-même la remarque, une courbe festonnée, dans laquelle le rapport de l'amplitude angulaire 2Φ des festons à la demi-circonférence peut varier d'une manière quelconque entre 0 et 1 : or, il suffit de jeter les yeux sur un pendule oscillant elliptiquement, et, par exemple, sur un fil à plomb ordinaire, pour reconnaître que ce résultat est complétement contredit par l'observation. Tant il est vrai que l'erreur est tellement humaine, qu'elle peut se glisser même sous la plume du plus illustre géomètre.

La durée du retour du pendule à la même extrémité du grand axe de l'ellipse est désignée, dans Lagrange, par $2T$; et l'intégration lui donne (page 204)

$$2T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{16}\right).$$

Pour obtenir le temps 2θ du retour au vertical de la lunette d'observation, il faut remarquer que, dans le temps 2θ, le rayon vecteur décrit l'angle 2π, tandis que, dans le temps $2T$, il décrit l'angle

$$4\Phi = 2\pi\left(1 + \frac{3\alpha\beta}{8}\right) = 360^\circ + 135^\circ \sin\alpha \sin\beta.$$

Donc, en supposant que l'on tienne compte de la petite inégalité relative à la position du grand axe par rapport au vertical de la lunette,

suivant la méthode indiquée à la page 12 de ce Mémoire, on aura

$$2\theta : 2T :: 2\pi : 4\Phi :: 1 : 1 + \frac{3\alpha\beta}{8},$$

$$\theta = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha\beta}{16}\right),$$

ce qui est la formule donnée dans mon Mémoire.

Il importe de remarquer que la durée du retour au méridien ne doit pas avoir tout à fait la même valeur, selon que le méridien est voisin du grand axe ou du petit axe.

MÉMOIRE

SUR

L'ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ DES ENVELOPPES SPHÉRIQUES;

PAR M. G. LAMÉ.

(Lu à l'Académie des Sciences, le 1er août 1853.)

Dans un ouvrage publié l'année dernière, j'ai exposé les principes de la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides et ses principales applications. Le travail actuel a pour objet l'intégration des équations générales de cette théorie, dans le cas de l'équilibre d'un système sphérique. Il donne la solution du problème suivant :

Une enveloppe solide, homogène et d'élasticité constante, est limitée par deux sphères concentriques. Les parois sont soumises à des forces connues, qui diffèrent, en intensité et en direction, d'un point à l'autre de ces surfaces. Il s'agit de déterminer les déplacements moléculaires ou les déformations, les dilatations ou les contractions, enfin les forces élastiques que les efforts extérieurs font naître dans l'intérieur de l'enveloppe.

On parvient à traiter ce cas général en se servant des coordonnées polaires ou sphériques, c'est-à-dire du rayon, de la latitude et de la longitude. Les propriétés de ces coordonnées, si souvent utilisées dans la *Mécanique céleste* et dans la *Théorie analytique de la chaleur*, trouvent ici de nouvelles applications; mais il faut les étendre, en quelque sorte, ou les généraliser. Quand il s'agit d'un problème relatif à l'attraction des sphéroïdes ou à l'équilibre des températures, il n'y a qu'une seule fonction à chercher; alors chaque terme de la série qui la représente peut n'admettre que deux facteurs, l'un fonction du rayon seul, l'autre contenant à la fois les deux coordonnées angu-

laires et plusieurs constantes, qu'il n'est pas toujours nécessaire de séparer.

Dans l'application à la théorie de l'élasticité, il y a trois fonctions principales à déterminer, et sept autres qui se déduisent des trois premières par des différentiations. Les séries qui représentent ces fonctions contiennent plusieurs suites de constantes arbitraires, qui se trouvent dans toutes, mais avec des facteurs numériques différents. De là résulte la nécessité de séparer ces constantes, de telle sorte que chaque terme des séries qu'on emploie n'en contienne qu'une seule, multipliée par un coefficient numérique spécial, et par trois facteurs où les trois coordonnées entrent séparément. Sans cet isolement préalable, il serait impossible de déterminer les constantes arbitraires à l'aide des forces données.

Les équations que j'ai intégrées, sont celles qui concernent l'équilibre intérieur des corps solides homogènes d'élasticité constante, et qui renferment deux nombres spécifiques, au lieu du seul coefficient qu'admettaient Navier, Poisson et d'autres géomètres, généralisation dont j'ai établi la nécessité dans mon ouvrage élémentaire sur l'élasticité. Ces équations sont aux différences partielles du second ordre et au nombre de trois. Elles contiennent simultanément trois fonctions qui sont, dans le cas actuel, les projections du déplacement moléculaire sur le rayon, sur la tangente à la méridienne et sur la perpendiculaire au plan méridien.

La première recherche à faire consistait à représenter ces fonctions par des séries suffisamment générales, dans lesquelles chaque groupe de termes correspondants vérifiât les équations aux différences partielles, et qui fussent composées de manière à faciliter la détermination des constantes arbitraires à l'aide des forces données, ou par les équations à la surface. La méthode d'intégration que j'ai adoptée est complétement analytique, et ne laisse subsister aucun doute sur la généralité des séries qu'elle donne : elle consiste à employer d'abord trois fonctions intermédiaires qui ramènent les équations aux différences partielles, du second ordre au premier, et à intégrer les équations ainsi réduites. Ces intégrales premières étant obtenues, l'intégration d'un second groupe de trois équations aux différences partielles du premier ordre conduit aux intégrales secondes, c'est-à-dire aux

séries qui doivent représenter, de la manière la plus générale, les projections du déplacement dans le système sphérique.

Dans la question de physique mathématique qu'il s'agit de résoudre, les équations à la surface sont au nombre de six. Elles expriment que les trois composantes de la force élastique, qui s'exerce sur l'élément d'une surface sphérique, sont des fonctions données des coordonnées angulaires, lorsqu'on prend cet élément sur les parois de l'enveloppe. La théorie de l'élasticité donne le moyen de déduire, par la différentiation et la combinaison des projections du déplacement, les expressions générales des composantes dont il s'agit. Si, dans les séries qui les représentent, on égale successivement le rayon à celui de l'une et de l'autre paroi, il en résulte six développements, ne contenant d'autres variables que les coordonnées angulaires et qu'il faut identifier avec les fonctions données.

Ces six équations à la surface devaient conduire à la détermination complète de tous les coefficients arbitraires introduits par l'intégration. C'est, en effet, ce qui a lieu. Mais ici la belle méthode d'élimination, si fréquemment employée dans la *Mécanique céleste* et dans la *Théorie analytique de la chaleur*, serait insuffisante sans une extension importante que je vais indiquer. Deux des six équations à la surface, celles qui concernent les composantes normales aux éléments des deux parois sphériques, ne contiennent la latitude que dans une seule espèce de facteurs, et la méthode ordinaire leur est directement applicable. Les quatre autres, au contraire, contiennent la latitude sous deux espèces différentes de facteurs, et la détermination des constantes arbitraires exige la découverte d'une nouvelle méthode d'élimination : car il s'agit de deux suites de coefficients indéterminés, entrant simultanément dans deux équations, lesquelles expriment, chacune, que la somme de deux séries distinctes doit être identiquement égale à une fonction donnée.

De là résulte un problème d'analyse que je crois nouveau en physique mathématique, et qui se présentera nécessairement dans tous les cas généraux de l'équilibre d'élasticité. Sa solution m'a d'abord paru difficile à établir; mais, telle est l'admirable fécondité qu'offre l'ensemble des propriétés que les géomètres ont trouvées dans l'emploi des

coordonnées sphériques, qu'en se guidant, dans le cas actuel, par une analogie toute naturelle, on devine facilement la solution cherchée, et que voici :

Pour isoler l'un des coefficients des deux suites qui composent des séries distinctes dans les deux équations, il faut multiplier chaque équation par le facteur variable qui accompagne, dans cette équation même, le coefficient qu'on a en vue, faire la somme des deux produits, et l'intégrer entre les limites extrêmes des coordonnées angulaires. Par cette opération, tous les coefficients des deux suites disparaissent, à l'exception d'un seul, dont la valeur s'exprime par le quotient de deux intégrales définies.

Si l'on réunit, dans chaque série, les termes qui correspondent au sinus et au cosinus d'un même multiple de la longitude, et au même indice d'une certaine fonction de la latitude, on forme ce qu'on peut appeler le terme général de cette série. Les termes généraux de toutes les séries contiennent les mêmes constantes, affectées de facteurs numériques différents, et le nombre de ces constantes est de douze. Elles sont déterminées par quatre groupes d'équations du premier degré, dont les seconds membres sont des quotients d'intégrales définies. Deux de ces groupes sont à quatre inconnues, les deux autres à deux inconnues seulement.

Mais, pour ceux des termes généraux où l'indice relatif à la latitude est l'unité, chaque groupe perd une inconnue, quoique le nombre des équations reste le même. De là résultent des relations qui doivent exister entre les données pour que ces équations ne soient pas incompatibles, et, en outre, l'indétermination des constantes qui ont disparu. Or ces relations expriment que les forces appliquées aux deux parois doivent se faire équilibre sur l'enveloppe, considérée comme un système invariable; et les constantes qui restent indéterminées, appartiennent à des groupes de termes représentant de simples translations parallèles à certains axes, ou de simples rotations autour des mêmes axes; genres de déplacements qui ne font naître aucune force élastique. Ces résultats étaient prévus; mais la manière dont ils se dégagent de la solution analytique mérite d'être remarquée.

En suivant les règles établies dans la théorie générale de l'élasticité, on peut déduire, des séries qui donnent les projections du déplace-

ment moléculaire, la loi de la déformation, la loi de la dilatation, celle de toute force élastique qui s'exerce dans l'intérieur de l'enveloppe, et discuter ces lois dans certains cas particuliers. Toutes ces applications n'offrent pas de difficulté nouvelle, et j'ai dû me dispenser de les traiter ici. Je voulais seulement montrer comment les coordonnées sphériques peuvent être appliquées, avec succès, à l'intégration d'un cas général de l'équilibre d'élasticité, où le corps solide a des dimensions finies dans tous les sens.

§ I.

Les équations aux différences partielles qui expriment l'équilibre d'une enveloppe sphérique solide, homogène et d'élasticité constante, sont les suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\,r^2 c\frac{d\theta}{dr}+\mu\left[\frac{dc\left(\frac{dU}{d\varphi}-\frac{drV}{dr}\right)}{d\varphi}-\frac{d\left(\frac{drW}{dr}-\frac{1}{c}\frac{dU}{d\psi}\right)}{d\psi}\right]+\rho r^2 c\,R_0=0,\\
&(\lambda+2\mu)\,c\,\frac{d\theta}{d\varphi}+\mu\left[\frac{d\frac{1}{rc}\left(\frac{dV}{d\psi}-\frac{dcW}{d\varphi}\right)}{d\psi}-\frac{dc\left(\frac{dU}{d\varphi}-\frac{drV}{dr}\right)}{dr}\right]+\rho rc\,\Phi_0=0,\\
&(\lambda+2\mu)\,\frac{1}{c}\,\frac{d\theta}{d\psi}+\mu\left[\frac{d\left(\frac{drW}{dr}-\frac{1}{c}\frac{dU}{d\psi}\right)}{dr}-\frac{d\frac{1}{rc}\left(\frac{dV}{d\psi}-\frac{dcW}{d\varphi}\right)}{d\varphi}\right]+\rho r\,\Psi_0=0.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, r est le rayon, ou la distance au centre du système sphérique, φ la latitude et c son cosinus, ψ la longitude; U, V, W sont les projections du très-petit déplacement d'un point de l'espace élastique, sur le rayon, sur la tangente au méridien, sur la tangente au petit cercle parallèle à l'équateur; R_0, Φ_0, Ψ_0 sont les composantes, suivant les mêmes directions, de la force extérieure, pesanteur ou autre, qui agit sur l'enveloppe solide; ρ est la densité du corps; λ, μ sont deux coefficients spécifiques et constants qui mesurent son élasticité; enfin θ est la dilatation cubique ayant pour valeur

$$(2)\qquad \theta=\frac{1}{r^2}\frac{dr^2U}{dr}+\frac{1}{rc}\frac{dcV}{d\varphi}+\frac{1}{rc}\frac{dW}{d\psi}.$$

En outre, s étant le sinus de la latitude, R_i, Φ_i, Ψ_i les compo-

santes, sur les directions citées, de la force élastique qui sollicite un élément-plan, tangent à la sphère, au cône de latitude, ou situé dans le plan méridien, suivant que l'indice i est 1, 2 ou 3, les valeurs de ces neuf composantes sont :

$$(3)\quad \begin{cases} R_1 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{dU}{dr}, \\ \Phi_2 = \lambda\theta + 2\mu\left(\dfrac{U}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dV}{d\varphi}\right), \\ \Psi_3 = \lambda\theta + 2\mu\left(\dfrac{U}{r} - \dfrac{s}{c}\dfrac{V}{r} + \dfrac{1}{rc}\dfrac{dW}{d\psi}\right). \\ \Psi_2 = \Phi_3 = \mu\left(\dfrac{1}{rc}\dfrac{dV}{d\psi} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dW}{d\varphi} + \dfrac{s}{c}\dfrac{W}{r}\right), \\ R_3 = \Psi_1 = \mu\left(\dfrac{dW}{dr} - \dfrac{W}{r} + \dfrac{1}{rc}\dfrac{dU}{d\psi}\right), \\ \Phi_1 = R_2 = \mu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dU}{d\varphi} + \dfrac{dV}{dr} - \dfrac{V}{r}\right). \end{cases}$$

Comme je l'ai indiqué dans les *Leçons sur l'élasticité*, on déduit les dix équations précédentes de celles qui expriment le même genre d'équilibre par les coordonnées rectilignes, en transformant ces dernières à l'aide des formules qui servent à passer aux coordonnées sphériques.

Les projections du déplacement et les composantes des forces élastiques ont des directions et des signes dont il importe de rappeler la liaison. Dans le système des coordonnées actuelles, les sphères concentriques, les cônes de latitude et les plans méridiens forment trois familles de surfaces conjuguées et orthogonales, dont les paramètres sont r, φ, ψ. L'axe ou la normale de l'une des trois surfaces qui passent en chaque point, a sa partie positive dirigée du côté où le paramètre de la surface augmente, sa partie négative située du côté où le paramètre diminue; et chacune de ces parties donne son signe aux projections et aux composantes qui ont la même direction qu'elle. Pour un élément-plan tangent à l'une des surfaces coordonnées, l'action élastique exercée par la partie solide extérieure, ou située du côté de la normale positive, sur la partie intérieure, a pour composantes R_i, Φ_i, Ψ_i; et, inversement, l'action exercée par la partie intérieure sur la partie extérieure a pour composantes $-R_i$, $-\Phi_i$, $-\Psi_i$.

L'enveloppe sphérique est sollicitée, sur les deux parois, par des forces dont on connaît l'intensité et la direction. Sur la paroi extérieure de rayon r_1, l'action élastique aux composantes (R_1, Φ_1, Ψ_1) est remplacée par une force donnée, ayant pour composantes $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{E}_1)$. Sur la paroi intérieure de rayon r_0, l'action élastique aux composantes $(-R_1, -\Phi_1, -\Psi_1)$ est pareillement remplacée par une force donnée, dont nous désignerons les composantes par $(-\mathfrak{N}_0, -\mathfrak{M}_0, -\mathfrak{E}_0)$. Les six nouvelles composantes $(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{E}_i)$ sont des fonctions connues des deux coordonnées φ et ψ, seules variables sur les deux parois. Ainsi l'on doit avoir, d'après les valeurs (3),

$$(4) \qquad \text{pour } r = r_i \begin{cases} R_1 = \lambda\theta + 2\mu \dfrac{dU}{dr} = \mathfrak{N}_i(\varphi, \psi), \\[2ex] \Phi_1 = \mu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dU}{d\varphi} + r\dfrac{d\dfrac{V}{r}}{dr}\right) = \mathfrak{M}_i(\varphi, \psi), \\[2ex] \Psi_1 = \mu\left(\dfrac{1}{rc}\dfrac{dU}{d\psi} + r\dfrac{d\dfrac{W}{r}}{dr}\right) = \mathfrak{E}_i(\varphi, \psi), \end{cases}$$

en écrivant ces équations deux fois, une avec l'indice $i = 1$, l'autre avec l'indice $i = 0$. Telles sont les six conditions ou les six équations à la surface.

Le problème d'analyse, qu'il s'agit de résoudre, consiste à trouver des fonctions U, V, W, de (r, φ, ψ), qui vérifient les équations aux différences partielles (1), et qui, pour $r = r_1$ et $r = r_0$, rendent identiques les six équations (4).

§ II.

Les fonctions ou les séries (U, V, W) doivent contenir des intégrales particulières (U_0, V_0, W_0), uniquement destinées à faire disparaître, dans les équations aux différences partielles linéaires (1), les termes en (R_0, Φ_0, Ψ_0), et, en outre, un complément intégral vérifiant les mêmes équations dépourvues de leurs derniers termes.

Si l'enveloppe sphérique est seulement pesante, l'axe polaire du système coordonné peut être vertical, et l'on a

$$R_0 = -gs, \quad \Phi_0 = gc, \quad \Psi_0 = 0,$$

c et s étant toujours le cosinus et le sinus de la latitude φ, g l'intensité de la force extérieure. Or, lors du passage de l'homogénéité absolue au régime de la pesanteur, les points géométriques de l'espace élastique n'ayant aucune raison de sortir de leur méridien primitif, W est nul, U et V sont indépendants de la longitude ψ, et les équations (1) deviennent

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2\mu)r^2\frac{d\theta}{dr}+\frac{\mu}{c}\frac{dc\zeta}{d\varphi}&=\varpi r^2 s,\\(\lambda+2\mu)\frac{d\theta}{d\varphi}-\mu\frac{d\zeta}{dr}&=\varpi r c,\end{aligned}\right\}\quad\text{où}\quad\left\{\begin{aligned}\theta&=\frac{1}{r^2}\frac{dr^2\mathrm{U}}{dr}+\frac{1}{rc}\frac{dc\mathrm{V}}{d\varphi},\\\zeta&=\frac{d\mathrm{U}}{d\varphi}-\frac{dr\mathrm{V}}{dr},\end{aligned}\right.$$

le poids de la matière solide, sous l'unité de volume, étant $\varpi=\rho g$. Ces équations sont vérifiées par les valeurs

$$\theta=\frac{\varpi}{\lambda}rs,\quad \zeta=\frac{\varpi}{\lambda}r^2c,$$

lesquelles conduisent aux intégrales particulières

$$(5)\qquad \mathrm{U}_0=\frac{\varpi}{10\lambda}r^2s,\quad \mathrm{V}_0=-\frac{3\varpi}{10\lambda}r^2c,\quad \mathrm{W}_0=0,$$

nécessaires et suffisantes quand l'enveloppe solide est seulement pesante.

S'il s'agit de l'équilibre relatif d'un corps tournant uniformément autour d'un axe fixe, que l'on peut prendre pour axe polaire, on a

$$\mathrm{R}_0=\omega^2rc^2,\quad \Phi_0=-\omega^2rcs,\quad \Psi_0=0,$$

la vitesse angulaire de la rotation étant ω. Alors, partant des mêmes principes, et suivant la même marche que dans le cas précédent, on obtient les intégrales particulières

$$(6)\quad \mathrm{U}_0=\left(\frac{1}{5}-c^2\right)\mathrm{Q}r^3,\quad \mathrm{V}_0=\frac{1}{2}\mathrm{Q}r^3cs,\quad \mathrm{W}_0=0,\ \text{où}\ \mathrm{Q}=\frac{\rho\omega^2}{7(\lambda+2\mu)}.$$

Si l'enveloppe solide est soumise à une attraction dirigée vers le centre, et proportionnelle à la distance r, on a

$$\mathrm{R}_0=\frac{gr}{r_1},\quad \Phi_0=0,\quad \Psi_0=0,$$

l'intensité de la force attractive étant g à la paroi extérieure, de rayon r_1,

Or, lors du passage de l'homogénéité absolue au régime de l'attraction, les points géométriques de l'espace élastique n'ayant aucune raison d'abandonner leur rayon primitif, les projections V, W du déplacement sont nulles; U ne peut d'ailleurs varier qu'avec r, et les équations (1) se réduisent à l'équation unique

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\frac{1}{r^2}\frac{dr^2 U}{dr}}{dr} = \frac{\varpi r}{r_1};$$

ce qui conduit aux intégrales particulières

$$(7)\qquad U_0 = \frac{\varpi}{10(\lambda + 2\mu)}\frac{r^2}{r_1}, \quad V_0 = 0, \quad W_0 = 0,$$

nécessaires et suffisantes dans ce dernier cas.

§ III.

On peut maintenant supprimer, dans les équations (1), les termes en (R_0, Φ_0, Ψ_0), et chercher le complément intégral des séries (U, V, W), puisque les valeurs particulières (5), (6) et (7), isolées ou ajoutées, permettent de traiter toutes les applications qui offriraient quelque intérêt.

Par cette suppression, et posant, pour simplifier,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{drV}{d\psi} - \frac{drcW}{d\varphi} &= r^2 c\,\mathfrak{a}, \\ \frac{drcW}{dr} - \frac{dU}{d\psi} &= c\,\mathfrak{b}, \\ \frac{dU}{d\varphi} - \frac{drV}{dr} &= \frac{1}{c}\Gamma, \end{aligned}\right.$$

les équations aux différences partielles (1) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{b}}{d\psi} - \frac{d\Gamma}{d\varphi} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} r^2 c \frac{d\theta}{dr}, \\ \frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\mathfrak{a}}{d\psi} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} c \frac{d\theta}{d\varphi}, \\ \frac{d\mathfrak{a}}{d\varphi} - \frac{d\mathfrak{b}}{dr} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\frac{1}{c}\frac{d\theta}{d\psi}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute ces équations (9) après les avoir respectivement différentiées, la première en r, la seconde en φ, la troisième en ψ, les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, Γ disparaissent, et, divisant par c, on obtient

$$(10)\qquad \frac{dr^2\dfrac{d\theta}{dr}}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dc\dfrac{d\theta}{d\varphi}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\theta}{d\psi^2} = 0.$$

La même suite d'opérations appliquée au groupe (8) fait disparaître les fonctions U, rV, rcW, et l'on a

$$(11)\qquad \frac{dr^2\mathfrak{U}}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dc\,\mathfrak{V}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d\Gamma}{d\psi} = 0.$$

Remarquons enfin que les fonctions U, rV, rcW sont liées à θ par l'équation (2), qui se met sous la forme

$$(12)\qquad \frac{dr^2\mathrm{U}}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dc.r\mathrm{V}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{drc\mathrm{W}}{d\psi} = r^2\theta.$$

L'ensemble des cinq groupes d'équations qui précèdent, indique clairement la marche à suivre pour obtenir les valeurs nécessaires et suffisamment générales des projections du déplacement : il faut intégrer d'abord l'équation (10), chercher ensuite des fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, Γ, qui satisfassent aux équations (9) et (11), et composer enfin des fonctions U, rV, rcW, qui vérifient les équations (8) et (12).

Supprimer les (R_0, Φ_0, Ψ_0), ou en faire abstraction, revient à étudier, directement et sans mélange, les lois de la déformation occasionnée, dans une enveloppe sphérique solide, par des efforts dont on connaît l'intensité et la direction, et qui sollicitent les deux parois; car les équations aux différences partielles (1) étant linéaires, les déplacements qui exprimeront cette nouvelle déformation coexisteront avec ceux qu'a fait naître la pesanteur, la force centrifuge ou l'attraction centrale, à la maniere de tous les petits mouvements, et comme l'entendait Bernoulli. Mais il importe de remarquer que, si l'on peut, comme nous allons le faire, étudier la déformation d'une enveloppe uniquement sollicitée sur ses parois, en n'employant que le complément intégral et en faisant abstraction des actions exercées sur toute la masse solide, l'inverse ou la réciproque n'a pas lieu : c'est-à-dire que les intégrales particulières (5), (6) ou (7) ne suffisent pas pour faire connaître

les déplacements dus à la pesanteur, à la force centrifuge ou à l'attraction centrale; qu'il faut y joindre essentiellement un complément intégral, dont les arbitraires puissent être déterminées par les conditions et l'état des parois de l'enveloppe, comme il sera dit à la fin de ce Mémoire.

§ IV.

Dans l'analyse qui va suivre, nous remplacerons souvent la latitude, ou la variable φ, par s ou son sinus, que nous désignerons alors par α; les règles de la différentiation donnent

$$\frac{d.}{d\varphi} = c\frac{d.}{d\alpha}, \quad \frac{1}{c}\frac{dc\frac{d.}{d\varphi}}{d\varphi} = \frac{d(1-\alpha^2)\frac{d.}{d\alpha}}{d\alpha},$$

et, quand on passe ainsi de la variable φ à la variable α, c est égal à $\sqrt{1-\alpha^2}$, et, pour simplifier, peut remplacer ce radical. Ce changement de variable indépendante est tellement facile, que nous pourrons, dans le même calcul et sans nuire à la clarté, employer alternativement φ et α, s'il en résulte des formules plus courtes. Pour le même but de simplification, posons encore

$$(13) \qquad \theta = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\mathrm{F},$$

et l'équation (10) devient

$$(14) \qquad \frac{dr^2\frac{d\mathrm{F}}{dr}}{dr} + \frac{d(1-\alpha^2)\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha}}{d\alpha} + \frac{\frac{d^2\mathrm{F}}{d\psi^2}}{1-\alpha^2} = 0.$$

Cette équation est bien connue; fréquemment employée par la *Mécanique céleste* ou par la *Théorie analytique de la chaleur*, elle régit le potentiel dans l'attraction des sphéroïdes, ou représente la loi des températures stationnaires d'une sphère solide homogène. Son intégrale générale, pour une enveloppe sphérique complète, est la double série

$$(15) \qquad \mathrm{F} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{l=0}^{l=n}\left[\left(\mathrm{A}r^n + \frac{\mathrm{B}}{r^{n+1}}\right)\cos l\psi + \left(\mathrm{C}r^n + \frac{\mathrm{D}}{r^{n+1}}\right)\sin l\psi\right]\mathrm{P}.$$

Chaque terme général contient quatre constantes arbitraires (A, B, C, D), deux nombres entiers n, l, et une fonction entière de α, qui est

$$(16)\qquad P = (1-\alpha^2)^{\frac{l}{2}}\left\{\begin{array}{l}\alpha^{n-l} - \dfrac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}\alpha^{n-l-2} \\ + \dfrac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\alpha^{n-l-4} - \ldots\end{array}\right\},$$

et qui vérifie l'équation différentielle

$$(17)\qquad \frac{d(1-\alpha^2)\dfrac{dP}{d\alpha}}{d\alpha} - \frac{l^2 P}{1-\alpha^2} + n(n+1)P = 0.$$

Pour chaque valeur de n, la double série (15) contient un groupe de $(n+1)$ termes généraux, où l'entier l est successivement égal à $0, 1, 2, \ldots, n$; enfin, il y a autant de groupes semblables que de valeurs de l'entier n, depuis zéro jusqu'à l'infini.

Dans l'enveloppe sphérique actuelle, le rayon r, toujours compris entre r_0 et r_1, ne peut pas être nul, puisque le solide ne s'étend pas jusqu'au centre: on doit donc admettre dans F (15) les termes partiels aux constantes B et D; mais s'il s'agissait d'une sphère pleine, ces termes, qui deviendraient infinis pour $r = 0$, devraient être supprimés. Pour les points du solide situés sur l'axe polaire, la latitude φ étant égale à $\frac{\pi}{2}$ et α à l'unité, F ou θ doit alors rester fini et devenir indépendant de ψ; pour les points du solide situés sur le plan de l'équateur, ou quand $\alpha = 0$, F doit aussi rester fini : la double série (15) jouit de ces propriétés, d'après la forme de la fonction P (16), et par l'absence de tout terme contenant des puissances négatives de c et de α. En outre, lorsqu'on augmente la variable ψ d'un nombre entier de circonférences ou de 2π, F doit reprendre la même valeur, et c'est ce qui arrive dans la double série (15), puisque l est un nombre entier. D'après ces considérations, la fonction F (15) a toute la généralité nécessaire pour représenter la dilatation cubique θ (13) de tous les points de l'enveloppe solide. Mais s'il s'agissait d'un secteur, d'un voussoir, d'une enveloppe sphérique évidée ou incomplète, cette double série n'aurait plus la généralité suffisante : elle pourrait alors admettre des

termes différents, et entre autres des fractions dont les dénominateurs s'annuleraient pour des valeurs de α ou même de ψ, appartenant à des points non occupés par le solide.

En adoptant l'intégrale (15) comme étant suffisamment générale pour l'objet qui nous occupe, il importe de remarquer que, si le sigma relatif à l paraît subordonné au sigma relatif à n, l'inverse peut aussi avoir lieu. On peut, en effet, réunir dans un seul groupe tous les termes qui contiennent le même nombre l, et où n a successivement toutes les valeurs depuis $n = l$ jusqu'à $n = \infty$, puis former autant de groupes semblables qu'il y a de valeurs de l depuis zéro jusqu'à l'infini. Suivant la question que l'on traite, l'un de ces deux modes de groupement est préférable à l'autre; mais, laissant indécis celui de ces modes qu'il convient d'employer ici, nous poserons symboliquement

$$(18) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{l=0}^{l=n} = \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{n=l}^{n=\infty} = S;$$

introduisant, en outre, les fonctions ξ et ζ de la seule variable ψ, données par les équations

$$(19) \qquad \begin{cases} A \cos l\psi + C \sin l\psi = \xi, \\ B \cos l\psi + D \sin l\psi = \zeta, \end{cases}$$

d'où

$$(19\,bis) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 \xi}{d\psi^2} + l^2 \xi = 0, \\ \dfrac{d^2 \zeta}{d\psi^2} + l^2 \zeta = 0, \end{cases}$$

nous pourrons écrire très-simplement l'intégrale générale (15) de la manière suivante :

$$(20) \qquad F = S\left(\xi r^n + \frac{\zeta}{r^{n+1}}\right) P;$$

et si nous avons besoin d'autres fonctions F', F'', de même nature que F, vérifiant comme cette dernière l'équation (14), nous exprimerons les formes intégrales de ces nouvelles fonctions en accentuant ξ et ζ

dans la série (20), et aussi les constantes (A, B, C, D) dans les équations (19).

§ V.

Cherchons maintenant des fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, Γ, qui satisfassent aux équations (9) et (11), ou bien, substituant à θ sa valeur (13), qui vérifient les quatre équations suivantes, lesquelles sont aux différences partielles, simultanées et du premier ordre,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathcal{B}}{d\psi} - \frac{d\Gamma}{d\varphi} = r^2 c \frac{dF}{dr},\\ &\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\mathcal{A}}{d\psi} = c\frac{dF}{d\varphi},\\ &\frac{d\mathcal{A}}{d\varphi} - \frac{d\mathcal{B}}{dr} = \frac{1}{c}\frac{dF}{d\psi},\\ &\frac{dr^2\mathcal{A}}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dc\mathcal{B}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d\Gamma}{d\psi} = 0, \end{aligned}\right.$$

et où la fonction F est donnée par la série (20). Il faut remarquer qu'en ajoutant les trois premières équations (21), après les avoir respectivement différentiées, la première en r, la seconde en φ, la troisième en ψ, on reproduit l'équation (14) que doit vérifier F; d'où il suit que ces trois équations, qui seraient incompatibles sans cette vérification, ne constituent réellement que deux équations distinctes.

Comme dans toute intégration d'un système d'équations linéaires, les fonctions cherchées doivent être ainsi composées,

$$(22)\qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}_e + \mathcal{A}', \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_e + \mathcal{B}', \quad \Gamma = \Gamma_e + \Gamma',$$

savoir, d'intégrales particulières et essentielles ($\mathcal{A}_e$, $\mathcal{B}_e$, Γ_e), rendant les premiers membres des équations (21) identiquement égaux aux seconds, et d'intégrales générales complémentaires ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, Γ'), vérifiant les mêmes équations lorsque tous leurs seconds membres sont zéro. Ces dernières intégrales se trouvent sans peine : il suffit, en effet, de prendre respectivement pour $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, Γ', les trois dérivées partielles en r, en φ, en ψ, d'une même fonction F′ qui vérifie l'équation (14); car, avec ces valeurs, les premiers membres des équations (21) s'annulent

tous. On a ainsi

$$(23)\quad \begin{cases} F' = S\left(\xi' r^n + \dfrac{\zeta'}{r^{n+1}}\right) P, \\ \mathcal{A}' = \dfrac{dF'}{dr}, \quad \mathcal{B}' = \dfrac{dF'}{d\varphi}, \quad \Gamma' = \dfrac{dF'}{d\psi}: \end{cases}$$

les fonctions ξ', ζ', de ψ seul, étant données par les équations (19), en mettant un accent aux constantes pour les distinguer de celles qui appartiennent à F.

La recherche des intégrales particulières ($\mathcal{A}_e$, $\mathcal{B}_e$, Γ_e) présente plus de difficulté. A l'aide d'une méthode d'intégration trop longue à développer ici, et dont il sera parlé au § X, j'ai trouvé que l'on peut prendre

$$(24)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_e = 0, \quad \mathcal{B}_e = S\left(-\dfrac{d\xi}{d\psi}\dfrac{r^{n+1}}{n+1} + \dfrac{\dfrac{d\zeta}{d\psi}}{nr^n}\right)\dfrac{P}{c}, \\ \Gamma_e = S\left(\xi\dfrac{r^{n+1}}{n+1} - \dfrac{\zeta}{nr^n}\right) c^2 \dfrac{dP}{d\alpha}: \end{cases}$$

et il est facile de vérifier que ces valeurs remplissent la condition, essentielle et suffisante, de rendre identiques les équations (21). En effet, avec elles, on a d'abord successivement, en ayant égard au second groupe des équations (19), à l'équation différentielle (17), et à la valeur (20) de F,

$$\frac{d\mathcal{B}_e}{d\psi} = S\left(\frac{\xi r^{n+1}}{n+1} - \frac{\zeta}{nr^n}\right)\frac{l^2 P}{c},$$

$$\frac{d\Gamma_e}{d\varphi} = c\frac{d\Gamma_e}{d\alpha} = cS\left(\frac{\xi r^{n+1}}{n+1} - \frac{\zeta}{nr^n}\right)\frac{dc^2\dfrac{dP}{d\alpha}}{d\alpha},$$

$$\frac{d\mathcal{B}_e}{d\psi} - \frac{d\Gamma_e}{d\varphi} = cS\left[n\xi r^{n+1} - (n+1)\frac{\zeta}{r^n}\right] P = r^2 c\frac{dF}{dr};$$

ce qui vérifie la première (21); ensuite $\mathcal{A}_e$ est nul, et la différentiation donne

$$\frac{d\Gamma_e}{dr} = cS\left(\xi r^n + \frac{\zeta}{r^{n+1}}\right)\frac{dP}{d\varphi} = c\frac{dF}{d\varphi},$$

$$-\frac{d\mathcal{B}_e}{dr} = \frac{1}{c}S\left(\frac{d\xi}{d\psi}r^n + \frac{\dfrac{d\zeta}{d\psi}}{r^{n+1}}\right)P = \frac{1}{c}\frac{dF}{d\psi}:$$

la seconde et la troisième sont donc identiques; enfin on a

$$\frac{dc\,\mathfrak{B}_e}{d\alpha} + \frac{1}{c^2}\frac{d\Gamma_e}{d\psi} = S\left(\frac{d\xi}{d\psi}\frac{r^{n+1}}{n+1} - \frac{\frac{d\zeta}{d\psi}}{nr^n}\right)\left(\frac{dP}{d\alpha} - \frac{dP}{d\alpha}\right) = 0,$$

et puisque $\mathfrak{A}_e$ est nul, la quatrième (21) est aussi vérifiée.

Si l'on substitue dans les formules (22) les valeurs trouvées (23) et (24), on a définitivement, en effectuant les différentiations indiquées sur F',

$$(25)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = S\left[n\xi' r^{n-1} - (n+1)\frac{\zeta'}{r^{n+2}}\right]P, \\ \mathfrak{B} = S\left(-\frac{d\xi}{d\psi}\frac{r^{n+}}{n+1} + \frac{\frac{d\zeta}{d\psi}}{nr^n}\right)\frac{P}{c} + S\left(\xi' r^n + \frac{\zeta'}{r^{n+1}}\right)c\frac{dP}{d\alpha}. \\ \Gamma = S\left(\frac{\xi r^{n+1}}{n+1} - \frac{\zeta}{nr^n}\right)c^2\frac{dP}{d\alpha} + S\left(\frac{d\xi'}{d\psi}r^n + \frac{\frac{d\zeta'}{d\psi}}{r^{n+1}}\right)P. \end{cases}$$

Et telles sont les intégrales générales des équations (21).

§ VI.

Essayons enfin de composer les séries qui doivent représenter, avec une généralité suffisante, les fonctions (U, V, W). Pour cela, il faut intégrer les équations (8) et (12), ou bien, substituant à θ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, Γ, leurs valeurs (13) et (22), il faut chercher des fonctions (U, rV, rcW) qui vérifient les quatre équations suivantes, lesquelles sont aux différences partielles, simultanées et du premier ordre,

$$(26)\quad \begin{cases} \frac{drV}{d\psi} - \frac{drcW}{d\varphi} = r^2 c\,(\mathfrak{A}_e + \mathfrak{A}'), \\ \frac{drcW}{dr} - \frac{dU}{d\psi} = c\,(\mathfrak{B}_e + \mathfrak{B}'), \\ \frac{dU}{d\varphi} - \frac{drV}{dr} = \frac{1}{c}(\Gamma_e + \Gamma'), \\ \frac{dr^2U}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dc.rV}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{drcW}{d\psi} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}r^2 F. \end{cases}$$

et où les fonctions sises aux seconds membres ont les valeurs (20), (23) et (24). La quatrième valeur (21), satisfaite par les valeurs (22), résulte, comme on l'a vu au § III, d'une élimination entre les trois premières équations (26); ces trois équations ne constituent donc réellement que deux équations distinctes.

Les fonctions à déterminer doivent être ainsi composées,

$$(27)\quad U = U_e + U' + U'', \quad V = V_e + V' + V'', \quad W = W_e + W' + W'',$$

savoir, d'intégrales particulières (U_e, V_e, W_e) vérifiant les équations (26) lorsque les seconds membres ne contiennent que les fonctions ($\mathfrak{A}_e$, $\mathfrak{B}_e$, $\mathfrak{C}_e$ et F); d'intégrales encore particulières (U', V', W') vérifiant les mêmes équations quand les seconds membres ne contiennent que ($\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ et 0); enfin des intégrales générales (U'', V'', W'') des équations (26) lorsque tous leurs seconds membres sont zéro. Ces dernières intégrales s'obtiennent, de la même manière que ($\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$), en introduisant une troisième fonction F'' qui vérifie l'équation (14); d'où résulte

$$(28)\quad \begin{cases} F'' = S\left(\xi'' r^n + \dfrac{\zeta''}{r^{n+1}}\right) P, \\ U'' = \dfrac{dF''}{dr}, \quad V'' = \dfrac{1}{r}\dfrac{dF''}{d\varphi}, \quad W'' = \dfrac{1}{rc}\dfrac{dF''}{d\psi}: \end{cases}$$

les fonctions ξ'', ζ'' de ψ étant données par les équations (19), avec deux accents aux constantes, pour les distinguer de celles qui appartiennent à F et à F'.

De ce que les fonctions ($\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$) sont respectivement égales aux trois dérivées partielles de F', il suit évidemment que les intégrales particulières (U', rV', rcW') peuvent être formées avec F', comme ($\mathfrak{A}_e$, $\mathfrak{B}_e$, $\mathfrak{C}_e$) ont été formées avec F; les formules (23) donnent donc immédiatement

$$(29)\quad \begin{cases} U' = 0, \quad V' = S\left(-\dfrac{d\xi'}{d\psi}\dfrac{r^n}{n+1} + \dfrac{\dfrac{d\zeta'}{d\psi}}{nr^{n+1}}\right)\dfrac{P}{c}. \\ W' = S\left(\dfrac{\xi' r^n}{n+1} - \dfrac{\zeta'}{nr^{n+1}}\right) c\dfrac{dP}{dz}; \end{cases}$$

déduction dont la simplicité remarquable est un avantage de la méthode d'intégration que nous avons suivie.

La recherche des intégrales particulières (U_e, rV_e, rcW_e) exige l'emploi de quatre coefficients indéterminés. De ce que $\mathcal{A}_e$ est nul, la première (26) indique que rV_e et rcW_e sont deux dérivées d'une même fonction, la première en φ, la seconde en ψ; on reconnaît facilement, d'après cela, que (U_e, V_e, W_e) doivent être de la forme

$$(30)\quad \begin{cases} U_e = S\left(-\gamma\xi r^{n+1} - \gamma'\dfrac{\zeta}{r^n}\right)P, \\ V_e = S\left(-\beta\xi r^{n+1} + \beta'\dfrac{\zeta}{r^n}\right)\dfrac{dP}{d\varphi}, \\ W_e = S\left(-\beta\dfrac{d\xi}{d\psi}r^{n+1} + \beta'\dfrac{\dfrac{d\zeta}{d\psi}}{r^n}\right)\dfrac{P}{c}; \end{cases}$$

réduisant alors les seconds membres des équations (26) aux seuls termes des séries $\mathfrak{B}_e$, Γ_e et F, qui contiennent un même ξ, ou un même ζ, et substituant dans les premiers membres le groupe de termes correspondants des séries (30), on obtient deux équations du premier degré entre γ et β, ou entre γ' et β'; et posant, pour simplifier,

$$(31)\qquad \lambda + \mu = e, \quad \lambda + 2\mu = a,$$

on trouve, pour les valeurs des quatre coefficients,

$$(32)\quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{[(n+2)e - 2a]}{2(2n+3)a}, & \beta = \dfrac{[(n+1)e + 2a]}{(2n+2)(2n+3)a}, \\ \gamma' = \dfrac{[(n-1)e + 2a]}{2(2n-1)a}, & \beta' = \dfrac{(ne - 2a)}{2n(2n-1)a}. \end{cases}$$

Substituant dans les formules (27) les valeurs trouvées (28), (29) et (30); effectuant les différentiations indiquées sur F''; remplaçant les $\xi^{(l)}$, $\zeta^{(l)}$ par leurs valeurs (19); mettant $\cos l\psi$ et $\sin l\psi$ en facteurs communs dans les termes généraux; enfin, désignant les polynômes en r seul, qui multiplient ces lignes trigonométriques, comme l'in-

dique le tableau suivant :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} & n\begin{pmatrix}A''\\C''\end{pmatrix} r^{n-1} - \gamma\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix} r^{n+1} - \frac{n+1}{r^{n+2}}\begin{pmatrix}B''\\D''\end{pmatrix} - \gamma'\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix} = \begin{cases}G,\\ \mathcal{G},\end{cases} \\ & \begin{pmatrix}A''\\C''\end{pmatrix} r^{n-1} - \beta\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix} r^{n+1} + \frac{1}{r^{n+2}}\begin{pmatrix}B''\\D''\end{pmatrix} + \beta'\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix} = \begin{cases}H,\\ \mathcal{H},\end{cases} \\ & \frac{r^n}{n+1}\begin{pmatrix}A'\\C'\end{pmatrix} - \frac{1}{nr^{n+1}}\begin{pmatrix}B'\\D'\end{pmatrix} = \begin{cases}H',\\ \mathcal{H}',\end{cases}\end{aligned}\right.$$

qu'il faut écrire deux fois, une avec les lettres supérieures, l'autre avec les lettres inférieures; on obtient définitivement

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} U &= S(G\cos l\psi + \mathcal{G}\sin l\psi)P, \\ V &= S(H\cos l\psi + \mathcal{H}\sin l\psi)c\frac{dP}{d\alpha} - S(\mathcal{H}'\cos l\psi - H'\sin l\psi)\frac{lP}{c}, \\ W &= S(\mathcal{H}\cos l\psi - H\sin l\psi)\frac{lP}{c} + S(H'\cos l\psi + \mathcal{H}'\sin l\psi)c\frac{dP}{d\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les intégrales générales des équations (1), quand on fait abstraction des (R_0, Φ_0, Ψ_0).

§ VII.

Les intégrales générales des fonctions U, V, W contiennent trois suites quadruples de constantes arbitraires, introduites par les séries F, F′, F″, et qu'il s'agit de déterminer. Pour cela, il est nécessaire de développer en série les six équations à la surface (4), que ces constantes doivent vérifier.

Si l'on ajoute au tableau (33) les désignations suivantes,

$$(35)\qquad \begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix} r^n + \begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}\frac{1}{r^{n+1}} = \begin{cases}G',\\ \mathcal{G}',\end{cases}$$

on peut écrire la série F (20), ou plutôt celle qui exprime θ (13), sous la forme

$$(36)\qquad \theta = S\left(\frac{\mu}{a}G'\cos l\psi + \frac{\mu}{a}\mathcal{G}'\sin l\psi\right) = \frac{\mu}{a}F.$$

On arrive d'ailleurs au même développement par la substitution directe des valeurs (34) dans l'équation (2); opération qui sert à vérifier ces valeurs et leurs coefficients (33).

Si l'on substitue les valeurs (34) et (36) dans les expressions (3) des composantes (R_1, Φ_1, Ψ_1) de la force élastique qui sollicite un élément-plan tangent à la sphère de rayon r; si aux notations (31) on ajoute celle-ci,

$$(37) \qquad 3\lambda + 2\mu = b, \quad \text{d'où} \quad a + b = 4e;$$

enfin, si l'on désigne les polynômes en r seul, qui multiplient les lignes trigonométriques en ψ, dans les divers termes généraux, comme l'indique le tableau

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} 2n(n-1)\mu \begin{pmatrix} A'' \\ C'' \end{pmatrix} r^{n-2} - \dfrac{\mu}{a} \dfrac{n(n-1)e-b}{2n+3} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} r^n \\ + \dfrac{2(n+1)(n+2)\mu}{r^{n+3}} \begin{pmatrix} B'' \\ D'' \end{pmatrix} + \dfrac{\mu}{a} \dfrac{(n+1)(n+2)e-b}{(2n-1)r^{n+1}} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{cases} K, \\ \mathcal{K}, \end{cases} \\ 2(n-1)\mu \begin{pmatrix} A'' \\ C'' \end{pmatrix} r^{n-2} - \dfrac{\mu}{a} \dfrac{(n+1)^2 e - a}{(n+1)(2n+3)} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} r^n \\ - \dfrac{2(n+2)\mu}{r^{n+3}} \begin{pmatrix} B'' \\ D'' \end{pmatrix} - \dfrac{\mu}{a} \dfrac{n^2 e - a}{n(2n-1)r^{n+1}} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{cases} L, \\ \mathcal{L}, \end{cases} \\ \dfrac{n-1}{n+1}\mu \begin{pmatrix} A' \\ C' \end{pmatrix} r^{n-1} + \dfrac{(n+2)\mu}{n r^{n+2}} \begin{pmatrix} B' \\ D' \end{pmatrix} = \begin{cases} L', \\ \mathcal{L}', \end{cases} \end{array} \right.$$

qu'il faut écrire deux fois, une avec les lettres supérieures, l'autre avec les lettres inférieures; les valeurs générales des composantes dont il s'agit se présentent sous la forme

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} R_1 = S(K\cos l\psi + \mathcal{K}\sin l\psi)P, \\ \Phi_1 = S(L\cos l\psi + \mathcal{L}\sin l\psi)c\dfrac{dP}{dz} - S(\mathcal{L}'\cos l\psi - L'\sin l\psi)\dfrac{lP}{c}, \\ \Psi_1 = S(\mathcal{L}\cos l\psi - L\sin l\psi)\dfrac{lP}{c} + S(L'\cos l\psi + \mathcal{L}'\sin l\psi)c\dfrac{dP}{dz}; \end{array} \right.$$

et, $(\mathfrak{K}_i, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{C}_i)$ étant des fonctions de α et ψ, les six équations à la

surface (4) qu'il faut identifier sont ainsi développées,

$$(40)\quad \begin{cases} S(K_i \cos l\psi + \mathcal{K}_i \sin l\psi) P = \mathfrak{N}_i, \\ S(L_i \cos l\psi + \mathcal{L}_i \sin l\psi) c \dfrac{dP}{d\alpha} - S(\mathcal{L}'_i \cos l\psi - L'_i \sin l\psi) \dfrac{lP}{c} = \mathfrak{M}_i, \\ S(\mathcal{L}_i \cos l\psi - L_i \sin l\psi) \dfrac{lP}{c} + S(L'_i \cos l\psi + \mathcal{L}'_i \sin l\psi) c \dfrac{dP}{d\alpha} = \mathfrak{T}_i; \end{cases}$$

équation qu'il faut écrire deux fois, l'une avec l'indice $i = 1$, l'autre avec l'indice $i = 0$.

L'indice i qui affecte les six lettres désignant les polynômes (38) indique ici que leur variable r doit être remplacée par r_i, c'est-à-dire successivement par r_1 et par r_0. Ainsi, dans les six développements (40), le groupe des termes généraux, correspondants à un même couple de valeurs des entiers l et n, contient douze coefficients constants (K_1, K_0,...). Or ces douze coefficients sont liés aux douze constantes $[A^{(j)}, B^{(j)}, C^{(j)}, D^{(j)}]$, du groupe de termes généraux correspondants des séries $F^{(j)}$, par douze équations du premier degré, que l'on obtient en faisant successivement $r = r_1$ et $r = r_0$ dans les six relations (38). Il suffit donc de déterminer les coefficients (K_1, K_0,...) par l'identification nécessaire des développements (40); car la résolution des douze équations citées donnera ensuite les constantes arbitraires introduites par l'intégration.

§ VIII.

Dans les équations (40), où l'on peut remplacer le signe S par le double sigma (18) correspondant au second mode de groupement défini au § IV, on isole chaque groupe de termes contenant le même nombre l, à l'aide d'un procédé fréquemment employé en physique mathématique. Il suffira de rappeler les formules

$$(41)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos l\psi \sin l'\psi \, d\psi = 0, \\ \left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos l\psi \cos l'\psi \, d\psi \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin l\psi \sin l'\psi \, d\psi \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 0, \text{ si } l' \text{ non} = l, \\ \pi, \text{ si } l' = l, \end{array}\right. \end{cases}$$

qu'il est d'ailleurs facile de vérifier. D'après ces formules, si l'on multiplie successivement les équations (40) par $\cos l\psi\, d\psi$, par $\sin l\psi\, d\psi$, l ayant la valeur correspondante au groupe que l'on veut isoler, et si l'on intègre entre les limites extrêmes de la variable ψ, on aura, tous les $\sum$ s'étendant de $n = l$, actuellement constant, jusqu'à $n = \infty$,

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum \mathrm{K}_i^{(l,n)}\, \mathrm{P}_l^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}_i \cos l\psi\, d\psi,\\
&\sum \mathfrak{K}_i^{(l,n)}\, \mathrm{P}_l^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}_i \sin l\psi\, d\psi,\\
&\sum \mathrm{L}_i^{(l,n)}\, c\,\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha} + \sum \left(-\mathfrak{L}_i'^{(l,n)}\right)\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i \cos l\psi\, d\psi,\\
&\sum \mathfrak{L}_i^{(l,n)}\, c\,\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha} + \sum \mathrm{L}_i'^{(l,n)}\,\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i \sin l\psi\, d\psi,\\
&\sum \mathrm{L}_i^{(l,n)}\,\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c} + \sum \left(-\mathfrak{L}_i'^{(l,n)}\right) c\,\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{T}_i \sin l\psi\, d\psi,\\
&\sum \mathfrak{L}_i^{(l,n)}\,\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c} + \sum \mathrm{L}_i'^{(l,n)}\, c\,\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{T}_i \cos l\psi\, d\psi.
\end{aligned}\right.$$

Le double accent dont les coefficients sont affectés, l'indice et l'accent de la fonction P, indiquent le couple de valeurs de l et de n qui caractérise le terme auquel appartiennent ces coefficients et cette fonction. Il importe de remarquer que les équations précédentes ne contiennent plus d'autre variable que α.

Pour isoler le groupe particulier qui correspond à $l = 0$, il faut multiplier les équations (40) par $d\psi$, et intégrer entre les limites de ψ; puisque

$$\int_0^{2\pi} \sin l\psi\, d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos l\psi\, d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi,$$

tous les termes où l n'est pas nul disparaissent par cette opération, et

il reste

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{n=\infty} K_i^{(0,n)} P_0^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}_i\, d\psi, \\ &\sum_{n=0}^{n=\infty} L_i^{(0,n)}\, c\,\frac{dP_0^{(n)}}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i\, d\psi, \\ &\sum_{n=0}^{n=\infty} L_i'^{(0,n)}\, c\,\frac{dP_0^{(n)}}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{T}_i\, d\psi; \end{aligned}\right.$$

équations que l'on déduit aussi des équations générales (42), en faisant $l=0$, remarquant que les coefficients $\left[\mathfrak{K}_i^{(0,n)}, \mathfrak{L}_i^{(0,n)}, \mathfrak{L}_i'^{(0,n)}\right]$ n'existent pas, et doublant le dénominateur π des seconds membres. Cette modification du dénominateur, seul motif qui oblige de considérer à part le groupe en $l=0$, on l'évite facilement en posant

$$(44)\qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 l\psi\, d\psi = \varpi_l,$$

et prenant pour dénominateur ϖ_l au lieu de π; car, d'après sa valeur (44), ϖ_l est une fonction de l, qui a pour valeur 2π quand $l=0$, et simplement π quand l est un nombre entier différent de zéro.

Deux propriétés des fonctions P donnent le moyen d'isoler successivement chaque coefficient des séries (42) à l'aide d'une opération semblable à celle qui a séparé ces séries. Si à l'équation différentielle (17) on joint celle-ci,

$$\frac{dc^2\dfrac{dP'}{d\alpha}}{d\alpha} - \frac{l'^2 P'}{c^2} + n'(n'+1)P' = 0.$$

P et P′ correspondant à des valeurs différentes de n et de l, on déduit facilement de ces équations

$$\begin{aligned} &[n'(n'+1) - n(n+1)]\int P P'\, d\alpha \\ &= (l'^2 - l^2)\int \frac{PP'}{c^2}\, d\alpha + c^2\left(P'\frac{dP}{d\alpha} - P\frac{dP'}{d\alpha}\right); \end{aligned}$$

définissant l'intégration entre les limites extrêmes -1 et $+1$ de la variable α, observant que c^2 ou $(1-\alpha^2)$ s'annule à ces deux limites, et que P, P′ sont des fonctions entières de α, on a

$$[n'(n'+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{+1} PP'\,d\alpha=(l'^2-l^2)\int_{-1}^{+1}\frac{PP'\,d\alpha}{c^2}:$$

d'où l'on conclut enfin

$$(45)\qquad \int_{-1}^{+1} P_l^{(n)}\,P_l^{(n')}\,d\alpha=\begin{cases}0, & \text{si } n' \text{ non} = n,\\ \displaystyle\int_{-1}^{+1}[P_l^{(n)}]^2\,d\alpha, & \text{si } n'=n.\end{cases}$$

Ce théorème suffit pour isoler chaque coefficient $K_i^{(l,n)}$, $\mathcal{K}_i^{(l,n)}$ dans les deux premières équations (42) : car si l'on multiplie ces équations par $P_l^{(n)}\,d\alpha$, n ayant la valeur à laquelle appartient le coefficient qu'on veut isoler, et si l'on intègre entre les limites extrêmes de α, tous les termes correspondants aux autres valeurs de n disparaîtront par cette opération, et l'on aura

$$(46)\qquad \begin{cases} K_i^{(l,n)}=\dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} P_l^{(n)}\cdot\int_0^{2\pi}\mathfrak{T}_i\cos l\psi\,d\psi\,.\,d\alpha}{\varpi_l\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[P_l^{(n)}\right]^2 d\alpha},\\[2ex] \mathcal{K}_i^{(l,n)}=\dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} P_l^{(n)}\cdot\int_0^{2\pi}\mathfrak{T}_i\sin l\psi\,d\psi\,.\,d\alpha}{\varpi_l\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[P_l^{(n)}\right]^2 d\alpha}.\end{cases}$$

Cette méthode d'élimination était connue; on l'emploie notamment, dans la théorie analytique de la chaleur, pour trouver la loi intégrale des températures stationnaires, dans une enveloppe sphérique homogène, dont les parois sont directement soumises à des sources constantes de chaleur ou de froid. Mais il faut trouver une autre méthode pour isoler les coefficients dans les quatre dernières équations (42); car ces coefficients entrent simultanément dans deux d'entre elles, et d'une manière différente de l'une à l'autre.

§ IX.

Il s'agit d'isoler les coefficients $E_l^{(n)}$, $\mathcal{E}_l^{(n)}$, dans deux équations simultanées de la forme

$$(47)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=l}^{n=\infty} E_l^{(n)}\, c\,\frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha} + \sum_{n=l}^{n=\infty} \mathcal{E}_l^{(n)}\,\frac{lP_l^{(n)}}{c} = F(\alpha), \\ \displaystyle\sum_{n=l}^{n=\infty} E_l^{(n)}\,\frac{lP_l^{(n)}}{c} + \sum_{n=l}^{n=\infty} \mathcal{E}_l^{(n)}\, c\,\frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha} = \mathcal{F}(\alpha), \end{cases}$$

où nous supposerons que le nombre fixe l n'est pas zéro. P et P′ désignant des fonctions (16) qui correspondent au même l, et à deux valeurs différentes de n, l'intégration par parties, et l'équation différentielle (17), donnent

$$\int c^2 \frac{dP}{d\alpha}\frac{dP'}{d\alpha}\,d\alpha = c^2\frac{dP}{d\alpha}P' - l^2\int\frac{PP'\,d\alpha}{c^2} + n(n+1)\int PP'\,d\alpha;$$

définissant l'intégration entre les limites extrêmes de α, on a

$$\int_{-1}^{+1} c^2\frac{dP}{d\alpha}\frac{dP'}{d\alpha}\,d\alpha + l^2\int_{-1}^{+1}\frac{PP'\,d\alpha}{c^2} = n(n+1)\int_{-1}^{+1} PP'\,d\alpha;$$

d'où il suit, d'après le théorème (45), et en employant la même notation,

$$(48)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{+1} c\,\frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha}\cdot c\,\frac{dP_l^{(n')}}{d\alpha}\,d\alpha + \int_{-1}^{+1}\frac{lP_l^{(n)}}{c}\cdot\frac{lP_l^{(n')}}{c}\,d\alpha \\ \displaystyle\quad = \begin{cases} 0, \text{ si } n' \text{ non} = n, \\ n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1}[P_l^{(n)}]^2\,d\alpha, \text{ si } n' = n. \end{cases} \end{cases}$$

D'après ce nouveau théorème, pour isoler un des coefficients $E_l^{(n)}$, on ajoutera les deux équations (47), respectivement multipliées par $c\,\frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha}\,d\alpha$, par $\frac{lP_l^{(n)}}{c}$, n ayant la valeur à laquelle appartient le coefficient qu'on veut isoler, et l'on intégrera la somme obtenue entre les

limites extrêmes de α; ce qui donnera d'abord

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_l^{(n)}.n(n+1)\int_{-1}^{+1}[\mathrm{P}_l^{(n)}]^2\,d\alpha \\
&+\sum_{n'=l}^{n'=\infty}\mathcal{E}_l^{(n')}\,l\int_{-1}^{+1}\left[\mathrm{P}_l^{(n')}\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}+\mathrm{P}_l^{(n)}\frac{d\mathrm{P}_l^{(n')}}{d\alpha}\right]d\alpha \\
&=\int_{-1}^{+1}\left[c\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}\mathrm{F}(\alpha)+\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c}\mathcal{F}(\alpha)\right]d\alpha;
\end{aligned}$$

mais les termes du sigma en n' sont tous nuls : en effet, chacun d'eux a pour facteur une intégrale définie qui n'est autre que la différence des valeurs que prend un produit $\mathrm{P}_l^{(n)}\,\mathrm{P}_l^{(n')}$ aux deux limites de α; et, puisque l n'est pas zéro, $\mathrm{P}_l^{(n)}$ (16) contient le facteur c et s'annule conséquemment à ces limites, ainsi que tout produit $\mathrm{P}_l^{(n)}\,\mathrm{P}_l^{(n')}$. On a donc, isolément,

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}_l^{(n)}&=\frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}\mathrm{F}(\alpha)+\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c}\mathcal{F}(\alpha)\,d\alpha\right]}{\displaystyle n(n+1)\int_{-1}^{+1}[\mathrm{P}_l^{(n)}]^2\,d\alpha},\\
\mathcal{E}_l^{(n)}&=\frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\frac{d\mathrm{P}_l^{(n)}}{d\alpha}\mathcal{F}(\alpha)+\frac{l\mathrm{P}_l^{(n)}}{c}\mathrm{F}(\alpha)\right]}{\displaystyle n(n+1)\int_{-1}^{+1}[\mathrm{P}_l^{(n)}]^2\,d\alpha},
\end{aligned}\right.$$

la valeur de $\mathcal{E}_l^{(n)}$ s'obtenant de la même manière que $\mathrm{E}_l^{(n)}$ en intervertissant les multiplicateurs.

Quand $l=0$, les équations (47) cessent d'être simultanées, et sont

$$(50)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{E}_0^{(n)}\,c\frac{d\mathrm{P}_0^{(n)}}{d\alpha}=\mathrm{F}(\alpha),\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}\mathcal{E}_0^{(n)}\,c\frac{d\mathrm{P}_0^{(n)}}{d\alpha}=\mathcal{F}(\alpha).$$

La formule (48) devient

$$(51)\quad \int_{-1}^{+1} c\,\frac{dP_0^{(n)}}{d\alpha}\,.\,c\,\frac{dP_0^{(n')}}{d\alpha}\,d\alpha = \begin{cases} 0, \text{ si } n' \text{ non} = n, \\ n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1} (P_0^{(n)})^2\,d\alpha, \text{ si } n' = n, \end{cases}$$

et, d'après ce théorème particulier, on isole chaque coefficient, dans l'une ou l'autre équation (50), en la multipliant par le facteur $c\,\frac{dP_0^{(n)}}{d\alpha}\,d\alpha$, et intégrant entre les limites de α; ce qui donne

$$(52)\quad E_0^{(n)} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} c\,\frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha}\,F(\alpha)\,d\alpha}{n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1} [P_0^{(n)}]^2\,d\alpha}, \qquad \mathcal{E}_0^{(n)} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} c\,\frac{dP_0^{(n)}}{d\alpha}\,\mathcal{F}(\alpha)\,d\alpha}{n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1} [P_0^{(n)}]^2\,d\alpha},$$

valeurs que reproduisent d'ailleurs les formules (49) lorsqu'on y fait $l = 0$.

La méthode d'élimination trouvée s'applique immédiatement aux quatre dernières équations (42), lesquelles forment deux couples simultanés semblables au couple (47). On en déduit

$$(53)\quad \begin{cases} L_i^{(l,n)} = \dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\,\frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i \cos l\psi\,d\psi - \frac{lP_l^{(n)}}{c}\int_0^{2\pi} \mathfrak{E}_i \sin l\psi\,d\psi\right]d\alpha}{\varpi_l\,.\,n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[P_l^{(n)}\right]^2 d\alpha}, \\[2ex] \mathcal{L}_i^{(l,n)} = \dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\,\frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i \sin l\psi\,d\psi + \frac{lP_l^{(n)}}{c}\int_0^{2\pi} \mathfrak{E}_i \cos l\psi\,d\psi\right]d\alpha}{\varpi_l\,.\,n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[P_l^{(n)}\right]^2 d\alpha}, \\[2ex] L_i'^{(l,n)} = \dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\,\frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha}\int_0^{2\pi} \mathfrak{E}_i \cos l\psi\,d\psi + \frac{lP_l^{(n)}}{c}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i \sin l\psi\,d\psi\right]d\alpha}{\varpi_l\,.\,n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[P_l^{(n)}\right]^2 d\alpha}, \\[2ex] \mathcal{L}_i'^{(l,n)} = \dfrac{\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[c\,\frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha}\int_0^{2\pi} \mathfrak{E}_i \sin l\psi\,d\psi - \frac{lP_l^{(n)}}{c}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i \cos l\psi\,d\psi\right]d\alpha}{\varpi_l\,.\,n(n+1)\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left[P_l^{(n)}\right]^2 d\alpha} \end{cases}$$

Ces valeurs, et celles (46) de $K_i^{(l,n)}$, $\mathcal{K}_i^{(l,n)}$, écrites deux fois, une avec l'indice $i=1$, l'autre avec l'indice $i=0$, donnent les douze coefficients $(K_1, K_0, \ldots)$ des six développements (40), et les équations à la surface sont maintenant satisfaites.

X.

Il importe d'évaluer ici l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} P^2\, d\alpha$, qui entre comme dénominateur dans les valeurs des coefficients (46) et (53). On établit d'abord la formule

$$(2n-1)P_l^{(n)} = n\alpha P_l^{(n-1)} - c^2 \frac{dP_l^{(n-1)}}{d\alpha}.$$

Pour cela, représentant le second membre par Q, et partant de l'équation différentielle (17), que vérifie la fonction $P_l^{(n-1)}$ en y changeant n en $n-1$, on constate que Q vérifie cette même équation (17) sans aucun changement; d'où résulte que Q est proportionnel à $P_l^{(n)}$, ou égal à $kP_l^{(n)}$; ensuite la constante k se détermine par l'égalité nécessaire des coefficients du même premier terme $c^l\alpha^{n-l}$, dans Q et dans $kP_l^{(n)}$, et l'on trouve $k=2n-1$. De cette première formule on déduit, par la différentiation, et ayant égard à l'équation différentielle que $P_l^{(n-1)}$ vérifie,

$$(2n-1)\frac{dP_l^{(n)}}{d\alpha} = \left(n^2 - \frac{l^2}{c^2}\right) P_l^{(n-1)} + n\alpha \frac{dP_l^{(n-1)}}{d\alpha};$$

éliminant la dérivée de $P_l^{(n-1)}$ entre les deux équations précédentes, on obtient la première du groupe suivant,

$$(54)\quad \begin{cases} \dfrac{n^2 - l^2}{2n-1} P_l^{(n-1)} = n\alpha P_l^{(n)} + c^2 \dfrac{dP_l^{(n)}}{d\alpha}, \\[2ex] (2n+1) P_l^{(n+1)} = (n+1)\alpha P_l^{(n)} - c^2 \dfrac{dP_l^{(n)}}{d\alpha}. \end{cases}$$

dont la seconde se déduit de la formule primitive par le changement de n en $n+1$; éliminant enfin la dérivée de $P_l^{(n)}$ entre les deux équations de ce groupe, on arrive à la formule importante

$$(55) \qquad P_l^{(n+1)} = \alpha P_l^{(n)} - \frac{n^2 - l^2}{4n^2 - 1} P_l^{(n-1)}$$

d'où découle facilement l'évaluation proposée.

A l'aide du théorème (45), la formule (55) conduit aux deux relations

$$\int_{-1}^{+1} [P_l^{(n+1)}]^2 \, d\alpha = \int_{-1}^{+1} \alpha P_l^{(n)} P_l^{(n+1)} \, d\alpha,$$

$$\int_{-1}^{+1} \alpha P_l^{(n)} P_l^{(n-1)} \, d\alpha = \frac{n^2 - l^2}{4n^2 - 1} \int_{-1}^{+1} [P_l^{(n-1)}]^2 \, d\alpha,$$

qui, étant comparées après le changement de n en $n-1$ dans la première, donnent

$$\int_{-1}^{+1} [P_l^{(n)}]^2 \, d\alpha = \frac{n^2 - l^2}{4n^2 - 1} \int_{-1}^{+1} [P_l^{(n-1)}]^2 \, d\alpha$$

$$= \prod_{j=l+1}^{j=n} \left(\frac{j^2 - l^2}{4j^2 - 1}\right) \int_{-1}^{+1} [P_l^{(l)}]^2 \, d\alpha,$$

en se servant de la notation souvent employée pour exprimer le produit de facteurs dont la loi est connue. L'équation (16) donne $P_l^{(l)} = c^l$, et l'on obtient

$$\int_{-1}^{+1} [P_l^{(l)}]^2 \, d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2l+1} \varphi \, d\varphi = 2 \prod_{i=1}^{i=l} \left(\frac{2i}{2i+1}\right)$$

à l'aide de l'intégration par parties. On a donc, enfin,

$$(56) \qquad \int_{-1}^{+1} [P_l^{(n)}]^2 \, d\alpha = 2 \prod_{i=1}^{i=l} \left(\frac{2i}{2i+1}\right) \cdot \prod_{j=l+1}^{j=n} \left(\frac{j^2 - l^2}{4j^2 - 1}\right).$$

Et telle est la valeur numérique de l'intégrale définie qui entre au dénominateur des coefficients (46) et (53).

Outre leur emploi dans la recherche de la valeur (56), les deux équations (54) sont utiles en d'autres circonstances. J'avais d'abord obtenu les intégrales générales des fonctions (U, V, W) sous une forme très-compliquée, et c'est à l'aide de ce groupe (54) que je suis parvenu à les simplifier considérablement, à les ramener enfin à la forme (34), qui pouvait seule se prêter à la détermination des constantes arbitraires. Voici le principe de ces simplifications : Comme on l'a vu au § VI, les intégrales (U, V, W) se composent chacune de trois séries distinctes, l'une déduite de F, la deuxième de F′, la troisième de F″, dont toutes les constantes sont d'ailleurs arbitraires. Dans les termes généraux de ces trois séries partielles, la même fonction P_l^n est associée à un binôme en $\left(r^{n+1} \text{ et } \frac{1}{r^n}\right)$ pour la première, en $\left(r^n \text{ et } \frac{1}{r^{n+1}}\right)$ pour la seconde, en $\left(r^{n-1} \text{ et } \frac{1}{r^{n+2}}\right)$ pour la troisième. Or si l'on change n (en $n+1$ et en $n-1$) dans le terme général d'une série inférieure, on reproduit les deux termes d'un binôme du même ordre que celui de la série immédiatement supérieure, mais accompagnés de $P_l^{(n+1)}$ et de $P_l^{(n-1)}$ que le groupe (54) permet d'exprimer en $P_l^{(n)}$. On peut donc ajouter à la première série partielle des termes empruntés à la deuxième, et à la deuxième des termes empruntés à la troisième; ce qui donne le moyen de simplifier les deux premieres séries, en conservant leur caractère essentiel, sans nuire à la dernière, dont la généralité ne perd rien à tous ces emprunts.

C'est réellement de cette manière que j'étais arrivé aux intégrales secondes (34). Mais en révisant les intégrales premières, c'est-à-dire celles des fonctions ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, r), qui ne contenaient chacune que deux séries partielles, l'une déduite de F, l'autre de F′, j'ai reconnu que la même méthode de simplification par emprunts s'y appliquait beaucoup plus facilement; et c'est ainsi que j'ai trouvé le groupe (24), ou les valeurs les plus simples de ($\mathfrak{a}_e$, $\mathfrak{b}_e$, r_e), qui conduisent si naturellement aux intégrales générales (34).

§ XI.

Les douze coefficients généraux (K_1, K_0,...), qui rendent identiques les six équations à la surface (40), étant déterminés par les valeurs (46) et (53), il faut recourir au tableau (38) pour déduire de ces valeurs les douze constantes générales [$A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$, $D^{(j)}$]. Pour cela, faisant successivement $r = r_1$ et $r = r_0$ dans les six équations de ce tableau, les seconds membres seront les douze coefficients généraux actuellement connus, et l'on aura à résoudre quatre groupes d'équations du premier degré, savoir : un à quatre inconnues (A'', A, B'', B) liées à (K_1, K_0, L_1, L_0); un deuxième à quatre inconnues (C'', C, D'', D) liées à ($\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_0$); un troisième à deux inconnues (A', B') liées à (L'_1, L'_0); enfin un dernier à deux inconnues (C', D') liées à ($\mathcal{L}'_1$, $\mathcal{L}'_0$). Tant que n sera plus grand que l'unité, ou pour tout couple (l, $n > 1$), ces groupes d'équations ne présenteront aucune indétermination, ni aucune impossibilité. Mais, quand $n = 1$, le nombre des équations de chaque groupe étant toujours quatre ou deux, il y a une inconnue de moins, puisque les premiers termes disparaissent au tableau (38) : d'où résultent, d'une part, des relations nécessaires entre les données, afin que les équations de chaque groupe ne soient pas incompatibles, et, d'autre part, l'indétermination des constantes qui correspondent aux termes nuls. Il importe de chercher ces relations nécessaires, et d'étudier les conséquences de cette indétermination.

Si l'on fait $r = r_i$ et $n = 1$ dans les deux premières cases du tableau (38), elle deviennent, d'après les notations (31) et (37),

$$\frac{\mu b}{5a}\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix} r_i + \frac{12\mu}{r_i^2}\begin{pmatrix}B''\\D''\end{pmatrix} + \frac{\mu(6e-b)}{ar_i^2}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix} = \begin{cases}K_i\\ \mathcal{K}_i\end{cases},$$

$$-\frac{\mu b}{10a}\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix} r_i - \frac{6\mu}{r_i^2}\begin{pmatrix}B''\\D''\end{pmatrix} - \frac{\mu(e-a)}{ar_i^2}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix} = \begin{cases}L_i\\ \mathcal{L}_i\end{cases};$$

ajoutant à la première deux fois la seconde, et faisant ensuite successivement $i = 1$, $i = 0$, on a

$$\frac{3\mu}{r_i^2}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix} = \begin{cases}K_i + 2L_i,\\ \mathcal{K}_i + 2\mathcal{L}_i,\end{cases} \qquad 3\mu\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix} = \begin{cases}r_1^2(K_1 + 2L_1) = r_0^2(K_0 + 2L_0),\\ r_1^2(\mathcal{K}_1 + 2\mathcal{L}_1) = r_0^2(\mathcal{K}_0 + 2\mathcal{L}_0),\end{cases}$$

d'où résultent, pour tout couple $(l, n=1)$, les deux relations nécessaires

$$(57)\qquad \begin{cases} r_1^2(\mathrm{K}_1 + 2\mathrm{L}_1) - r_0^2(\mathrm{K}_0 + 2\mathrm{L}_0) = 0, \\ r_1^2(\mathcal{K}_1 + 2\mathcal{L}_1) - r_0^2(\mathcal{K}_0 + 2\mathcal{L}_0) = 0. \end{cases}$$

Si l'on fait pareillement $r = r_i$ et $n=1$ dans la dernière case du même tableau (38), elle devient et donne

$$\frac{3\mu}{r_i^3}\begin{pmatrix}\mathrm{B}'\\ \mathrm{D}'\end{pmatrix} = \begin{cases}\mathrm{L}'_1,\\ \mathcal{L}'_1,\end{cases}\qquad 3\mu\begin{pmatrix}\mathrm{B}'\\ \mathrm{D}'\end{pmatrix} = \begin{cases} r_1^3\,\mathrm{L}'_1 = r_0^3\,\mathrm{L}'_0,\\ r_1^3\,\mathcal{L}'_1 = r_0^3\,\mathcal{L}'_0,\end{cases}$$

d'ou résultent encore, pour tout couple $(l, n=1)$, les deux relations nécessaires

$$(58)\qquad r_1^3\,\mathrm{L}'_1 - r_0^3\,\mathrm{L}'_0 = 0,\quad r_1^3\,\mathcal{L}'_1 - r_0^3\,\mathcal{L}'_0 = 0.$$

Quand $n=1$, le nombre l ne peut être que 1, ou zéro. Dans le premier cas, on a, en désignant $\cos\psi$ et $\sin\psi$ par c' et s' et d'après les formules (16), (56), (44), (46) et (53)

$$(59)\qquad \begin{cases} n=1,\quad l=1,\quad \mathrm{P}=c,\\ c\dfrac{d\mathrm{P}}{d\alpha} = -s,\qquad \displaystyle\int_{-1}^{+1}\mathrm{P}^2\,d\alpha = \frac{4}{3},\quad \varpi_l = \pi,\\ \mathrm{K}_i = \dfrac{3}{4\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\mathfrak{K}_i\,cc'\,d\psi\,d\alpha,\\ \mathrm{L}_i = \dfrac{3}{8\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}(-\mathfrak{M}_i\,sc' - \mathfrak{T}_i\,s')\,d\psi\,d\alpha,\\ \mathrm{L}'_i = \dfrac{3}{8\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}(-\mathfrak{T}_i\,sc' + \mathfrak{M}_i\,s')\,d\psi\,d\alpha,\\ \mathcal{K}_i = \dfrac{3}{4\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\mathfrak{K}_i\,cs'\,d\psi\,d\alpha,\\ \mathcal{L}_i = \dfrac{3}{8\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}(-\mathfrak{M}_i\,ss' + \mathfrak{T}_i\,c')\,d\psi\,d\alpha,\\ \mathcal{L}'_i = \dfrac{3}{8\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}(-\mathfrak{T}_i\,ss' - \mathfrak{M}_i\,c')\,d\psi\,d\alpha. \end{cases}$$

Dans le second cas, on a, d'après les mêmes formules,

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned}
&n = 1, \quad l = 0, \quad P = s,\\
&c\frac{dP}{d\alpha} = c, \quad \int_{-1}^{+1} P^2\, d\alpha = \frac{2}{3}, \quad \varpi_l = 2\pi,\\
&K_i = \frac{3}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \mathfrak{K}_i\, s\, d\psi\, d\alpha,\\
&L_i = \frac{3}{8\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_i\, c\, d\psi\, d\alpha,\\
&L'_i = \frac{3}{8\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \mathfrak{T}_i\, c\, d\psi\, d\alpha,\\
&\mathfrak{K}_i = 0, \quad \mathfrak{L}_i = 0, \quad \mathfrak{L}'_i = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue successivement ces valeurs (59) et (60) dans les relations (57), on trouve, en remplaçant l'intégration en α par celle en φ,

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{K}_1\, cc' - \mathfrak{M}_1\, sc' - \mathfrak{T}_1\, s')\, r_1\, c\, d\psi\,.\, r_1\, d\varphi\\
&-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{K}_0\, cc' - \mathfrak{M}_0\, sc' - \mathfrak{T}_0\, s')\, r_0\, c\, d\psi\,.\, r_0\, d\varphi = 0,\\
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{K}_1\, cs' - \mathfrak{M}_1\, ss' + \mathfrak{T}_1\, c')\, r_1\, c\, d\psi\,.\, r_1\, d\varphi\\
&-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{K}_0\, cs' - \mathfrak{M}_0\, ss' + \mathfrak{T}_0\, c')\, r_0\, c\, d\psi\,.\, r_0\, d\varphi = 0,\\
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{K}_1\, s + \mathfrak{M}_1\, c)\, r_1\, c\, d\psi\,.\, r_1\, d\varphi\\
&-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{K}_0\, s + \mathfrak{M}_0\, c)\, r_0\, c\, d\psi\,.\, r_0\, d\varphi = 0;
\end{aligned}\right.$$

la dernière (57) étant rendue identique par les valeurs (60). Si l'on fait successivement les mêmes substitutions dans les relations (58), on trouve de la même manière,

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\mathfrak{M}_1 r_1 s' - \mathfrak{T}_1 r_1 sc')\, r_1\, cd\psi . r_1\, d\varphi \\
&-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\mathfrak{M}_0 r_0 s' - \mathfrak{T}_0 r_0 sc')\, r_0\, cd\psi . r_0\, d\varphi = 0, \\
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\mathfrak{M}_1 r_1 c' + \mathfrak{T}_1 r_1 ss')\, r_1\, cd\psi . r_1\, d\varphi \\
&-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\mathfrak{M}_0 r_0 c' + \mathfrak{T}_0 r_0 ss')\, r_0\, cd\psi . r_0\, d\varphi = 0, \\
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\mathfrak{T}_1 r_1 c . r_1\, cd\psi . r_1\, d\varphi \\
&-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\mathfrak{T}_0 r_0 c . r_0\, cd\psi . r_0\, d\varphi = 0;
\end{aligned}\right.$$

la dernière (58) étant encore rendue identique par les valeurs (60). Ce qui donne en tout six conditions nécessaires entre les données.

Si l'on considère maintenant trois axes rectilignes et orthogonaux, menés par le centre du système sphérique, savoir : deux dans le plan de l'équateur par les longitudes 0 et $\frac{\pi}{2}$, le troisième suivant l'axe polaire; si l'on remarque que les produits $r_1 c_1\, d\psi . r_1\, d\varphi$ et $r_0 cd\psi . r_0\, d\varphi$ sont les éléments de surface des deux parois; enfin, si l'on se rappelle que les composantes des forces données sont $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{T}_1)$ sur la paroi extérieure, et $(-\mathfrak{N}_0, -\mathfrak{M}_0, -\mathfrak{T}_0)$ sur la paroi intérieure (§ I); on reconnaîtra facilement, dans les premiers membres des équations (61),

les sommes des composantes de toutes les forces données suivant les trois axes choisis, et, dans les premiers membres des relations (62), les sommes des moments des mêmes forces autour des mêmes axes. D'après cela, les six conditions trouvées expriment que les forces données doivent se faire équilibre sur l'enveloppe solide, considérée comme un système invariable, pour que cette enveloppe puisse être en équilibre d'élasticité sous l'action de ces forces.

§ XII.

Les constantes qui restent indéterminées, par suite de leur disparition du tableau (38) quand $n = 1$, existent néanmoins dans les séries (34), lesquelles contiennent ainsi des groupes de termes dont les coefficients pourront être pris arbitrairement, sans que les efforts donnés s'y opposent. Limitant les fonctions (U, V, W) (34) à ces seuls groupes, on trouve, par le tableau (33) et par les premières lignes (59) et (60),

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} U &= A''_0 s + A''_1 cc' + C''_1 cs', \\ V &= A''_0 c - A''_1 sc' - C''_1 ss' + \tfrac{1}{2} A'_1 rs' - \tfrac{1}{2} C'_1 rc', \\ W &= \tfrac{1}{2} A'_0 rc - A''_1 s' + C''_1 c' - \tfrac{1}{2} A'_1 rsc' - \tfrac{1}{2} C'_1 rss'; \end{aligned}\right.$$

les indices 1 et 0 indiquant ici que les constantes appartiennent respectivement aux couples ($l = 1$, $n = 1$) et ($l = 0$, $n = 1$). Or ces valeurs (63) expliquent très-bien la cause de l'indétermination dont il s'agit. Chaque groupe de termes correspondant à une même constante représente les projections d'un déplacement général qui peut être considéré isolément, et l'on reconnaît facilement que les groupes en A''_1, en C''_1, en A''_0 indiquent de simples translations du solide, parallèles respectivement aux trois axes définis plus haut, tandis que les groupes en A'_1, en C'_1, en A'_0 indiquent de simples rotations autour des mêmes axes. Or on sait, et il est d'ailleurs évident, que des déplacements de cette nature ne font naître aucune force élastique; ces termes ne devaient donc laisser aucune trace dans les six équations à la surface, et leurs constantes rester indéterminées. On pourra, d'ailleurs, disposer de ces constantes de telle sorte,

qu'à certains points de l'enveloppe solide correspondent des déplacements ou nuls, ou donnés. Nous regardons cette explication, si simple et si naturelle, des anomalies offertes par les termes où $n = 1$, comme une vérification de la théorie exposée dans le Mémoire actuel.

Quand $n = 0$, le tableau (38) présente aussi des circonstances particulières : les constantes (A'', C'') disparaissent de la première des trois cases, et dans les deux autres (B, D), (B', D') ont pour facteur l'infini. Mais, quand $n = 0$, le nombre l ne peut être que zéro, la fonction P (16) se réduit à l'unité et sa dérivée à zéro. Les séries Φ_1, Ψ_1 (39) et, par suite, les deux dernières équations (40) n'ont donc pas de termes correspondants à $n = 0$; et il en est de même des séries V, W (34). Alors les deux dernières cases du tableau (38) n'existent pas, et la première case se réduit à sa première équation. De plus, la constante B est nécessairement nulle, car elle donnerait un terme entièrement constant pour U [d'après G (33)], lequel, n'étant associé à aucun terme de V et de W, ne pourrait à lui seul vérifier les équations générales. De là résulte, enfin, que pour $n = 0$ le tableau (38) se réduit à

$$\frac{\mu}{3a} A + \frac{4\mu}{r^3} B'' = K^{(0,0)},$$

et faisant successivement $r = r_1$, et $r = r_0$, recourant à la première formule (46), on a

$$\frac{\mu b}{3a} A + \frac{4\mu}{r_1^3} B'' = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathfrak{X}_1 \, d\alpha, \quad \frac{\mu b}{3a} A + \frac{4\mu}{r_0^3} B'' = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathfrak{X}_0 \, d\alpha$$

pour déterminer les seules constantes A et B'' qui correspondent au groupe ($l = 0$, $n = 0$); car la constante A'' n'existe nulle part, pas même dans U, puisqu'elle disparaît aussi de G (33) lorsque $n = 0$; ce qui n'ajoute aucun nouveau terme au groupe (63).

Là se termine la solution du problème proposé lorsque l'on fait abstraction des (R_0, Φ_0, Ψ_0). Mais quand on tient compte de ces forces, il en résulte les modifications suivantes. Les valeurs générales (34) comprennent alors les intégrales particulières (U_0, V_0, W_0) définies au

§ II, et qui sont des fonctions connues. Si l'on désigne par $(\mathfrak{R}, \mathfrak{F}, \mathfrak{U})$ les valeurs que prennent les composantes (R_1, Φ_1, Ψ_1) (3), quand on y substitue ces intégrales particulières au lieu de (U, V, W), il faut ajouter ces valeurs aux seconds membres des équations (39) et, dans les équations à la surface (40), ainsi que dans les intégrales doubles (46) et (53), remplacer les $(\mathfrak{X}_i, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{T}_i)$ par $(\mathfrak{X}_i - \mathfrak{R}_i, \mathfrak{M}_i - \mathfrak{F}_i, \mathfrak{T}_i - \mathfrak{U}_i)$. Le reste de la solution s'achève et se discute de la même manière.

Alors les équations de condition (61) et (62) expriment que l'enveloppe sphérique, considérée comme un système invariable, doit être en équilibre sous l'action des efforts qui sollicitent les parois et des forces agissant sur la masse. C'est ainsi que, dans le cas de la pesanteur ou des valeurs (5), les efforts extérieurs doivent faire équilibre au poids de l'enveloppe. Mais s'il s'agit de la force centrifuge ou des valeurs (6), de l'attraction centrale ou des valeurs (7), les équations de condition (61) et (62) doivent être indépendantes de ces forces, qui s'équilibrent d'elles-mêmes sur le solide; et, en effet, on s'assure que, dans ces deux cas, les $(\mathfrak{R}_i, \mathfrak{F}_i, \mathfrak{U}_i)$ n'entrent pas dans les coefficients des termes correspondants à $n = 1$, et qui seuls composent les équations de condition.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

Recherche du dernier multiplicateur pour deux formes spéciales et remarquables des équations différentielles du problème des trois corps;

PAR M. PAINVIN.

Lorsqu'on voulut intégrer rigoureusement les équations différentielles de ce problème, on ne trouva d'abord que les sept intégrales fournies par les principes de la conservation du mouvement du centre de gravité, des forces vives et des aires. Ces sept intégrales se réduisent à quatre si l'on cherche le mouvement relatif des trois corps autour du centre de gravité du système; et l'on ne possède la solution rigoureuse que dans certains cas particuliers exposés dans la *Mécanique céleste* de Laplace (tome IV, livre X). Cependant de remarquables travaux ont avancé la solution du cas général.

Jacobi, dans un Mémoire intitulé : *Élimination des nœuds dans le problème des trois corps* [*], a réduit les six équations différentielles du second ordre, qui expriment le mouvement relatif des trois corps autour du centre de gravité du système, à cinq équations du premier ordre et une du second; il a donc fait cinq intégrations.

M. Bertrand [**] a ramené la question à l'intégration de six équations, toutes du premier ordre, c'est-à-dire qu'il a effectué une intégration de plus que ne l'avait fait Jacobi.

On sait d'ailleurs que, pour trouver la dernière intégrale d'un système quelconque d'équations différentielles du premier ordre, il

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, année 1842, page 236, ou *Journal de Mathématiques*, tome IX, page 313.

[**] *Journal de Mathématiques*, tome XVII, page 393

suffit d'avoir ce que M. Jacobi nomme le *dernier multiplicateur* [*] de ce système; théorème qui s'étend à des équations d'ordre supérieur en les remplaçant par des équations équivalentes du premier ordre.

C'est la recherche de ce multiplicateur, pour les équations différentielles établies par M. Jacobi et pour celles de M. Bertrand, qui fera l'objet du présent travail. J'ai été guidé, dans le second calcul, par les indications qu'a données M. Bertrand dans son cours au Collége de France.

Recherche du multiplicateur du système d'équations différentielles donné par Jacobi.

Ce système est formé des équations que voici :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\operatorname{tang} u \frac{di}{\sin i} = \operatorname{tang} u_1 \frac{di_1}{\sin i_1},\\
&\operatorname{tang} u \frac{di}{\operatorname{tang} i} + du = \frac{c}{\mu r^2}\frac{\sin i_1}{\sin \mathrm{I}}\,dt,\\
&\operatorname{tang} u_1 \frac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} + du_1 = -\frac{c}{\mu_1 r_1^2}\frac{\sin i}{\sin \mathrm{I}}\,dt,\\
&\frac{c \sin i_1}{r r_1 \cos u \sin u_1 \sin^2 \mathrm{I}}\,di = -\left(\frac{m_1 m_2 \gamma\delta}{\rho^3} + \frac{m_2 m \gamma_1 \delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m m_1 \gamma_2 \delta_2}{\rho_2^3}\right),\\
&\frac{c^2}{\sin^2 \mathrm{I}}\left(\frac{\sin^2 i_1}{\mu r^2} + \frac{\sin^2 i}{\mu_1 r_1^2}\right) + \mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 = 2\mathrm{U} - 2h,\\
&\frac{d^2(\mu r^2 + \mu_1 r_1^2)}{dt^2} = 2\mathrm{U} - 4h.
\end{aligned}\right.$$

On a posé

$$(2)\quad \mathrm{U} = \frac{m_1 m_2}{\rho} + \frac{m_2 m_1}{\rho_1} + \frac{m m_1}{\rho_2};$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\rho^2 &= \gamma^2 r^2 + \delta^2 r_1^2 + 2\gamma\delta r r_1 \cos \mathrm{V},\\
\rho_1^2 &= \gamma_1^2 r^2 + \delta_1^2 r_1^2 + 2\gamma_1\delta_1 r r_1 \cos \mathrm{V},\\
\rho_2^3 &= \gamma_2^2 r^2 + \delta_2^2 r_1^2 + 2\gamma_2\delta r r_1 \cos \mathrm{V};
\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \cos \mathrm{V} = \cos u \cos u_1 + \cos \mathrm{I} \sin u \sin u_1.$$

$$(5)\quad \mathrm{I} = i_1 - i.$$

[*] *Journal de Mathématiques*, tome X, page 337.

Les constantes γ, γ_1, γ_2, δ, δ_1, δ_2 sont liées entre elles par les relations

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0,\\ &\delta + \delta_1 + \delta_2 = 0,\\ &m_1 m_2 \gamma\delta + m_2 m \gamma_1 \delta_1 + m m_1 \gamma_2 \delta_2 = 0,\end{aligned}\right.$$

trois de ces constantes pourront être prises arbitrairement.

Les quantités μ et μ_1 se trouvent déterminées par les formules

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} M\mu &= m_1 m_2 \gamma^2 + m_2 m \gamma_1^2 + m m_1 \gamma_2^2,\\ M\mu_1 &= m_1 m_2 \delta^2 + m_2 m \delta_1^2 + m m_1 \delta_2^2,\end{aligned}\right.$$

où

$$M = m + m_1 + m_2;$$

U est la fonction des forces, c et h sont deux constantes arbitraires.

Jacobi arrive aux formules ci-dessus en réduisant le problème des trois corps à un problème du mouvement de deux corps. Il démontre :

1°. Que l'intersection commune des plans des orbites des deux corps fictifs reste constamment dans un plan fixe ; c'est le plan invariable du système.

2°. Que les inclinaisons des plans des deux orbites à ce plan fixe et les paramètres de ces orbites regardées comme des ellipses variables, sont quatre éléments, dont deux quelconques déterminent rigoureusement les deux autres.

Il est donc conduit à choisir pour variables :

Les deux rayons vecteurs r et r_1 :

Leurs distances angulaires au nœud ascendant commun des plans des deux orbites u et u_1 ;

Les inclinaisons de ces plans au plan invariable i et i_1 ;

La longitude du nœud ascendant commun des deux plans ou sa distance à l'axe des x, Ω.

Il remarque que ce dernier angle s'obtient par une quadrature, dès qu'on a intégré le système (1) ; c'est donc sur ce système que porte toute la difficulté de la question

Je me propose de déterminer le multiplicateur du système (1).

Je résous d'abord les quatre premières équations par rapport aux dérivées $\frac{di}{dt}$, $\frac{di_1}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, $\frac{du_1}{dt}$. Ayant ces valeurs, je détermine les quantités

$$(8') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= K\left[rr_1 \sin V \frac{dV}{dt} - \cos V\,(rr'_1 + r_1 r') \right] \\ &\quad - rr' H - r_1 r'_1 G, \\ \sin V \frac{dV}{dt} &= \frac{c}{\sin I} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin i_1 (\cos u_1 \sin u - \cos I \cos u \sin u_1)}{\mu r^2} \\ &- \frac{\sin i (\cos u \sin u_1 - \cos I \cos u_1 \sin u)}{\mu_1 r_1^2} \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} K &= \frac{m_1 m_2 \gamma \delta}{\rho^3} + \frac{m_2 m \gamma_1 \delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m m_1 \gamma_2 \delta_2}{\rho_2^3}, \\ H &= \frac{m_1 m_2 \gamma^2}{\rho^3} + \frac{m_2 m \gamma_1^2}{\rho_1^3} + \frac{m m_1 \gamma_2^2}{\rho_2^3}, \\ G &= \frac{m_1 m_2 \delta^2}{\rho^3} + \frac{m_2 m \delta_1^2}{\rho_1^3} + \frac{m m_1 \delta_2^2}{\rho_2^3}, \end{aligned} \right.$$

et

$$\frac{dr}{dt} = r', \quad \frac{dr_1}{dt} = r'_1.$$

Différentiant la cinquième des équations (1), en ayant égard aux relations (8), éliminant h entre la cinquième et la sixième, on obtient deux équations qui, résolues par rapport à $\frac{dr'}{dt}$ et $\frac{dr'_1}{dt}$, donnent

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{c^2 \sin^2 i_1}{\mu^2 r^3 \sin^2 I} + \frac{-U r'_1 + K r_1 (r r'_1 + r_1 r') \cos V + r r_1 r' H + r_1^2 r'_1 G}{\mu (r r'_1 - r_1 r')},$$

$$\frac{dr'_1}{dt} = \frac{c^2 \sin^2 i}{\mu_1^2 r_1^3 \sin^2 I} - \frac{-U r' + K r (r r'_1 + r_1 r') \cos V + r^2 r' H + r r_1 r'_1 G}{\mu_1 (r r'_1 - r_1 r')}.$$

Les formules (2), (3), (9) permettent de simplifier les seconds termes, et l'on remplacera le système (1) par le suivant :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{di}{dt} &= -\frac{rr_1 \cos u \sin u_1 \sin^2 \mathrm{I}}{c \sin i_1} \mathrm{K} = i', \\
\frac{di_1}{dt} &= -\frac{rr_1 \cos u_1 \sin u \sin^2 \mathrm{I}}{c \sin i} \mathrm{K} = i'_1, \\
\frac{du}{dt} &= \frac{c}{\mu r^2} \frac{\sin i_1}{\sin \mathrm{I}} + \frac{rr_1 \sin u \sin u_1 \cos i \sin^2 \mathrm{I}}{c \sin i \sin i_1} \mathrm{K} = u', \\
\frac{du_1}{dt} &= -\frac{c}{\mu_1 r_1^2} \frac{\sin i}{\sin \mathrm{I}} + \frac{rr_1 \sin u \sin u_1 \cos i_1 \sin^2 \mathrm{I}}{c \sin i \sin i_1} \mathrm{K} = u'_1, \\
\frac{dr}{dt} &= r', \\
\frac{dr_1}{dt} &= r'_1, \\
\frac{dr'}{dt} &= \frac{c^2 \sin^2 i_1}{\mu^2 r^2 \sin^2 \mathrm{I}} - \frac{r\mathrm{H} + r_1 \mathrm{K} \cos \mathrm{V}}{\mu} = r'', \\
\frac{dr'_1}{dt} &= \frac{c^2 \sin^2 i}{\mu_1^2 r_1^3 \sin^2 \mathrm{I}} - \frac{r_1 \mathrm{G} + r\mathrm{K} \cos \mathrm{V}}{\mu_1} = r''_1.
\end{aligned}\right.$$

Or le multiplicateur est défini par l'équation

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d.\mathrm{M}i'}{di} + \frac{d.\mathrm{M}i'_1}{di_1} + \frac{d.\mathrm{M}u'}{du} + \frac{d.\mathrm{M}u'_1}{du_1} + \frac{d.\mathrm{M}r'}{dr} \\
&\qquad + \frac{d.\mathrm{M}r'_1}{dr_1} + \frac{d.\mathrm{M}r''}{dr'} + \frac{d.\mathrm{M}r''_1}{dr'_1} = 0,
\end{aligned}\right.$$

M étant le multiplicateur cherché.

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(12)\quad \frac{d.\log \mathrm{M}}{dt} = -\left(\frac{dr'}{dr} + \frac{dr'_1}{dr_1} + \frac{dr''}{dr'} + \frac{dr''_1}{dr'_1} + \frac{di'}{di} + \frac{di'_1}{di_1} + \frac{du'}{du} + \frac{du'_1}{du_1}\right),$$

et, en effectuant les calculs,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d.\log \mathrm{M}}{dt} &= -\frac{rr_1 \mathrm{K} \sin^2 \mathrm{I} (\cos u \sin u_1 \cos i + \cos u_1 \sin u \cos i_1)}{c \sin i \sin i_1} \\
&\quad + \frac{2 rr_1 \mathrm{K}}{c} \left(\frac{\cos u_1 \sin u}{\sin i} - \frac{\cos u \sin u_1}{\sin i_1}\right) \sin \mathrm{I} \cos \mathrm{I}.
\end{aligned}\right.$$

Il s'agit d'intégrer cette équation.

Première méthode.

Je remarque que

$$\frac{d.}{dt}\sin i \sin i_1 = -\frac{rr_1 \mathrm{K} \sin^2 \mathrm{I}}{c}(\cos u \sin u_1 \cos i + \cos u_1 \sin u \cos i_1),$$

$$\frac{rr_1 \mathrm{K} \cos u_1 \sin u}{c \sin i} = -\frac{1}{\sin^2 \mathrm{I}}\frac{di_1}{dt},$$

$$\frac{rr_1 \mathrm{K} \cos u \sin u_1}{c \sin i} = -\frac{1}{\sin^2 \mathrm{I}}\frac{di}{dt}.$$

Donc

$$\frac{d.\log \mathrm{M}}{dt} = \frac{d.\log \sin i \sin i_1}{dt} - \frac{2\cos \mathrm{I}}{\sin \mathrm{I}}\left(\frac{di_1}{dt} - \frac{di}{dt}\right);$$

or

$$\mathrm{I} = i_1 - i,$$

$$\frac{d.\log \mathrm{M}}{dt} = \frac{d.\log \sin i \sin i_1}{dt} - \frac{2\cos \mathrm{I}\frac{d\mathrm{I}}{dt}}{\sin \mathrm{I}},$$

$$\frac{d.\log \mathrm{M}}{dt} = \frac{d.\log \sin i \sin i_1}{dt} - \frac{d.\log \sin^2 \mathrm{I}}{dt};$$

donc

$$(14) \qquad \mathrm{M} = \frac{\sin i \sin i_1}{\sin^2 \mathrm{I}}.$$

Seconde méthode.

Si nous posons

$$\mathrm{P} = \frac{-rr_1 \sin^2 \mathrm{I}(\cos u \sin u_1 \cos i + \cos u_1 \sin u \cos i_1) + 2rr_1 \sin \mathrm{I} \cos \mathrm{I}(\cos u_1 \sin u \sin i_1 - \cos u \sin u_1 \sin i)}{c \sin i \sin i_1}$$

et

$$\log \mathrm{M} = \mathrm{N},$$

l'équation (13) devient

$$\frac{d\mathrm{N}}{dt} = \mathrm{KP}.$$

Développons le premier membre,

$$\frac{d\mathrm{N}}{di}\frac{di}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{di_1}\frac{di_1}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{du}\frac{du}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{du_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{dr}\frac{dr}{dt}$$
$$+ \frac{d\mathrm{N}}{dr_1}\frac{dr_1}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{dr'}\frac{dr'}{dt} + \frac{d\mathrm{N}}{dr'_1}\frac{dr'_1}{dt} = \mathrm{KP}.$$

Remplaçant les dérivées $\frac{di}{dt}$, etc., par leurs valeurs (10), et chassant les dénominateurs μ et μ_1, on trouve

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \mu^2 \cdot \frac{dN}{dr'_1} \cdot \frac{c^2 \sin^2 i}{r_1^3 \sin^2 I} + \mu_1^2 \cdot \frac{dN}{dr'} \cdot \frac{c^2 \sin^2 i_1}{r^3 \sin^2 I} - \mu^2 \mu_1 \cdot \frac{dN}{du_1} \frac{c \sin i}{r^2 \sin I} + \mu_1^2 \mu \cdot \frac{dN}{du} \cdot \frac{c \sin i}{r_1^2 \sin I} \\ - \mu^2 \mu_1 \frac{dN}{dr'_1} (r_1 G + r K \cos V) - \mu_1^2 \mu \frac{dN}{dr'} (r H + r_1 K \cos V) \\ + \mu^2 \mu_1^2 \left(\frac{dN}{dr} r' + \frac{dN}{dr_1} r'_1 \right) \\ - \mu^2 \mu_1^2 K \left(\begin{array}{l} \frac{dN}{di} \frac{\cos u \sin u_1 \sin^2 I r r_1}{c \sin i_1} + \frac{dN}{di_1} \frac{\cos u_1 \sin u \sin^2 I r r_1}{c \sin i} \\ - \frac{dN}{du} \cdot \frac{\sin u \sin u_1 \cos i \sin^2 I r r_1}{c \sin i \sin i_1} - \frac{dN}{du_1} \frac{\sin u \sin u_1 \cos i_1 \sin^2 I r r_1}{c \sin i \sin i_1} + P \end{array} \right) \end{array}\right\} = 0.$$

Le multiplicateur doit vérifier cette équation aux différentielles partielles; or il pourrait arriver qu'il fût indépendant de μ et de μ_1: introduisons cette hypothèse en posant

$$\frac{dN}{du} = 0, \quad \frac{dN}{du_1} = 0, \quad \frac{dN}{dr} = 0, \quad \frac{dN}{dr_1} = 0, \quad \frac{dN}{dr'} = 0, \quad \frac{dN}{dr'_1} = 0,$$

c'est-à-dire que N n'est fonction que de i et i_1.

Pour l'obtenir, nous intégrerons l'équation suivante, à laquelle se réduit l'équation (15),

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dN}{di} \cdot \frac{\cos u \sin u_1 \sin I}{\sin i_1} + \frac{dN}{di_1} \frac{\cos u_1 \sin u \sin I}{\sin i} \\ - \frac{(\cos u \sin u_1 \cos i + \cos u_1 \sin u \cos i_1) \sin I + 2 (\cos u \sin u_1 \sin i - \cos u_1 \sin u \sin i_1) \cos I}{\sin i \sin i_1} \end{array}\right\} = 0.$$

Posons

$$\cos u \sin u_1 = a, \quad \cos u_1 \sin u = b;$$

ce sont des constantes dans l'intégration, et elles doivent disparaître du résultat. Pour avoir N, il faut intégrer le système

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dN \sin i}{(a \cos i + b \cos i_1) \sin I + 2 (a \sin i - b \sin i_1) \cos I} = \frac{di}{a \sin I}, \\ \frac{dN \sin i_1}{(a \cos i + b \cos i_1) \sin I + 2 (a \sin i - b \sin i_1) \cos I} = \frac{di_1}{b \sin I}. \end{array}\right.$$

Pour intégrer la première des équations (17), remarquons que l'on a

$$a \sin i \, di_1 = b \sin i_1 \, di;$$

au moyen de cette relation éliminons b, il en résulte

$$dN - \frac{di \sin i_1 (\cos i \sin I + 2 \sin i \cos I) + di_1 \sin i (\cos i_1 \sin I - 2 \sin i_1 \cos I)}{\sin i \sin i_1 \sin I} = 0$$

$$dN - \frac{di \cos i}{\sin i} - \frac{di_1 \cos i_1}{\sin i_1} + \frac{2 \cos I \, dI}{\sin I} = 0,$$

$$\log M - \log \frac{\sin i \sin i_1}{\sin^2 I} = \text{const.};$$

donc

$$(18) \qquad \varphi \left(\log M - \log \frac{\sin i \sin i_1}{\sin^2 I} \right) = C$$

est une intégrale de l'équation (16).

Un calcul analogue effectué sur la deuxième des équations (15) conduirait à la même expression; donc l'équation (18) est l'intégrale.

Par conséquent,

$$(19) \qquad M = \frac{\sin i \sin i_1}{\sin^2 I}$$

est un des multiplicateurs du système (1); car on sait qu'il en existe une infinité. Cette expression a cela de remarquable, qu'elle n'est fonction que des inclinaisons des plans des orbites sur le plan invariable.

Recherche du multiplicateur du système d'équations différentielles donné par M. Bertrand.

Pour avancer la solution du problème des trois corps, M. Bertrand est conduit, par des considérations développées dans le Mémoire mentionné plus haut, à intégrer le système suivant :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} = 2w, \quad \frac{du_1}{dt} = 2w_1, \quad \frac{dQ}{dt} = R + R_1,\\
&\frac{dv}{dt} = 2\sum \psi'(\rho_3^2)\,[2(\alpha_1-\alpha_2)^2 w + 2R(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)]\,m_1 m_2,\\
&\frac{dv_1}{dt} = 2\sum \psi'(\rho_3^2)\,[2(\beta_1-\beta_2)^2 w_1 + 2R_1(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)]\,m_1 m_2,\\
&\frac{dw}{dt} = v + \sum \psi'(\rho_3^2)\,[2(\alpha_1-\alpha_2)^2 u + 2Q(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)]\,m_1 m_2,\\
&\frac{dw_1}{dt} = v_1 + \sum \psi'(\rho_3^2)\,[2(\beta_1-\beta_2)^2 u_1 + 2Q(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)]\,m_1 m_2,\\
&\frac{dR}{dt} = Z + \sum \psi'(\rho_3^2)\,[2(\alpha_1-\alpha_2)^2 Q + 2u(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)]\,m_1 m_2,\\
&\frac{dR_1}{dt} = Z + \sum \psi'(\rho_3^2)\,[2(\beta_1-\beta_2)^2 Q + 2u(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)]\,m_1 m_2,
\end{aligned}
\right.
$$

après avoir posé

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
q_1^2 + q_3^2 + q_5^2 &= u, & q_2^2 + q_4^2 + q_6^2 &= u_1,\\
q_1'^2 + q_3'^2 + q_5'^2 &= v, & q_2'^2 + q_4'^2 + q_6'^2 &= v_1,\\
q_1 q_1' + q_3 q_3' + q_5 q_5' &= w, & q_2 q_2' + q_4 q_4' + q_6 q_6' &= w_1,\\
q_1' q_2 + q_3' q_4 + q_5' q_6 &= R, & q_1 q_2' + q_3 q_4' + q_5 q_6' &= R_1,\\
q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6 &= Q, & & \\
q_1' q_2' + q_3' q_4' + q_5' q_6' &= Z, & &
\end{aligned}
\right.
$$

On a, de plus, les formules

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\rho_1^2 &= (\alpha_2-\alpha_3)^2 u + (\beta_2-\beta_3)^2 u_1 + 2(\alpha_2-\alpha_3)(\beta_2-\beta_3)Q,\\
\rho_2^2 &= (\alpha_3-\alpha_1)^2 u + (\beta_3-\beta_1)^2 u_1 + 2(\alpha_3-\alpha_1)(\beta_3-\beta_1)Q,\\
\rho_3^2 &= (\alpha_1-\alpha_2)^2 u + (\beta_1-\beta_2)^2 u_1 + 2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)Q.
\end{aligned}
\right.
$$

Les constantes α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 sont liées entre elles par les relations

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 &= 0,\\
m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3 &= 0,\\
m_1^2\alpha_1^2 + m_2^2\alpha_2^2 + m_3^2\alpha_3^2 &= 1,\\
m_1^2\beta_1^2 + m_2^2\beta_2^2 + m_3^2\beta_3^2 &= 1,\\
m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2 + m_3\alpha_3\beta_3 &= 0,
\end{aligned}
\right.
$$

m_1, m_2, m_3 étant les masses des trois corps.

Il s'agit d'abord de démontrer que Z peut s'exprimer en fonction des neuf variables u, u_1, v, v_1, w, w_1, R, R_1, Q et de chercher son expression.

Pour y parvenir, considérons dans l'espace, à partir de l'origine des coordonnées, quatre droites qui forment avec trois axes rectangulaires des angles dont les cosinus soient respectivement proportionnels à q_1, q_3, q_5; q_2, q_4, q_6; q'_1, q'_3, q'_5; q'_2, q'_4, q'_6; soient OA′, OA″, OA‴, OA^{IV} ces droites, O étant l'origine et A′, A″, A‴, A^{IV} les points où elles percent une sphère d'un rayon égal à l'unité; désignons ces droites par les numéros

$$(1),\quad (2),\quad (3),\quad (4):$$

on aura, en ayant égard aux formules (2),

$$(5)\quad \begin{cases} \cos(1,2) = \cos\alpha = \dfrac{Q}{\sqrt{uu_1}}, & \cos(2,3) = \cos\gamma_1 = \dfrac{R}{\sqrt{u_1 v}}, \\ \cos(1,3) = \cos\beta = \dfrac{w}{\sqrt{uv}}, & \cos(2,4) = \cos\beta_1 = \dfrac{w_1}{\sqrt{u_1 v_1}}, \\ \cos(1,4) = \cos\gamma = \dfrac{R_1}{\sqrt{uv_1}}, & \cos(3,4) = \cos\alpha_1 = \dfrac{Z}{\sqrt{vv_1}}. \end{cases}$$

Nous obtiendrons ainsi un quadrilatère sphérique qui est déterminé, puisque l'on connaît trois côtés et deux diagonales; donc le quatrième côté, c'est-à-dire cos α_1, pourra s'exprimer au moyen de ces quantités qui sont des fonctions de u, u_1, etc.

Pour trouver son expression, construisons le triangle sphérique A′A″A‴, puis le triangle A′A″A^{IV}; le côté cherché sera A‴A^{IV}.

Posons

$$\text{angle } \widehat{A'A''A^{\text{IV}}} = m,\quad \widehat{A'A''A'''} = n,\quad \widehat{A'''A''A^{\text{IV}}} = z.$$

Or, dans la construction du triangle A′A″A^{IV}, le sommet A^{IV} peut occuper trois positions différentes :

1°. Si A^{IV} se trouve à gauche du côté A′A″ et en dehors du triangle A′A″A‴, alors

$$z = m - n;$$

2°. Si A″ se trouve encore à gauche de A′A′ et dans le triangle

$A'A''A^{\text{IV}}$, alors

$$z = n - m;$$

3°. Si A^{IV} se trouve à droite du triangle primitivement construit, dans ce cas

$$z = m + n.$$

Ceci posé, on a

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \cos\alpha\ \cos\gamma_1 + \sin\alpha\ \sin\gamma_1 \cos n,\\
\cos\gamma &= \cos\alpha\ \cos\beta_1 + \sin\alpha\ \sin\beta_1 \cos m,\\
\cos\alpha_1 &= \cos\beta_1 \cos\gamma_1 + \sin\beta_1 \sin\gamma_1 \cos z,\\
\cos z &= \cos\begin{bmatrix} m+n \\ \text{ou} \\ \pm(m-n) \end{bmatrix} = \cos m \cos n \pm \sin m \sin n;
\end{aligned}$$

des deux premières formules, déduisant $\cos m$, $\sin m$, $\cos n$, $\sin n$, on arrive à

$$\cos\alpha_1 = \frac{Z}{\sqrt{vv_1}} = \frac{\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta_1\cos\gamma_1 - \cos\alpha(\cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1) \pm \sqrt{P}}{\sin^2\alpha},$$

la quantité P pouvant se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
P = {} & [\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta_1\cos\gamma_1 - \cos\alpha(\cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)]^2\\
& + \sin^2\alpha \begin{pmatrix} \sin^2\alpha + \cos^2\beta\cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma\cos^2\gamma_1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma_1 \\ + 2\cos\alpha\cos\gamma\cos\beta_1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\beta_1 - \cos^2\gamma_1 \\ - 2\cos\beta\cos\beta_1\cos\gamma\cos\gamma_1 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

si l'on pose

$$(6)\quad \begin{cases}
A = uu_1 - Q^2,\\
B = Q(RR_1 + ww_1) - uw_1R - u_1wR_1,\\
C = uv_1R^2 + u_1vR_1^2 - R^2R_1^2 + 2ww_1RR_1 - 2v_1wQR\\
\quad - 2vw_1QR_1 - uu_1vv_1 + vv_1Q^2 + uvw_1^2 + u_1v_1w^2 - w^2w_1^2,
\end{cases}$$

on trouve, définitivement,

$$(7)\qquad Z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A};$$

d'où l'on déduit immédiatement l'équation du deuxième degré qui

détermine Z; appelant D cette fonction, on a

$$(8) \qquad D = AZ^2 + 2BZ + C = 0.$$

On peut arriver, par une autre marche, à la détermination de Z. Considérons la fonction

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = {} & (ax + by + cz + du)^2 + (a'x + b'y + c'z + d'u)^2 \\ & + (a''x + b''y + c''z + d''u)^2.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{dy} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{dz} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{du} = 0,$$

on obtient quatre équations qui ont une infinité de solutions, quels que soient a, a', a'', etc.

En effet, posons

$$\begin{aligned} ax + by + cz + du &= \alpha, \\ a'x + b'y + c'z + d'u &= \beta, \\ a''x + b''y + c''z + d''u &= \gamma; \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx} = 2\left(\alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\beta}{dx} + \gamma\frac{d\gamma}{dx}\right), \quad \frac{d\mathfrak{F}}{dz} = 2\left(\alpha\frac{d\alpha}{dz} + \beta\frac{d\beta}{dz} + \gamma\frac{d\gamma}{dz}\right),$$

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dy} = 2\left(\alpha\frac{d\alpha}{dy} + \beta\frac{d\beta}{dy} + \gamma\frac{d\gamma}{dy}\right), \quad \frac{d\mathfrak{F}}{du} = 2\left(\alpha\frac{d\alpha}{du} + \beta\frac{d\beta}{du} + \gamma\frac{d\gamma}{du}\right).$$

Or, pour que ces expressions soient nulles, il suffit que

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Ces trois équations ont une infinité de valeurs; donc les équations suivantes sont vérifiées par une infinité de valeurs :

$$\begin{aligned} & (ax + by + cz + du)a + (a'x + b'y + c'z + d'u)a' \\ & + (a''x + b''y + c''z + d''u)a'' = 0, \\ & (ax + by + cz + du)b + (a'x + b'y + c'z + d'u)b' \\ & + (a''x + b''y + c''z + d''u)b'' = 0, \\ & (ax + by + cz + du)c + (a'x + b'y + c'z + d'u)c' \\ & + (a''x + b''y + c''z + d''u)c'' = 0, \\ & (ax + by + cz + du)d + (a'x + b'y + c'z + d'u)d' \\ & + (a''x + b''y + c''z + d''u)d'' = 0. \end{aligned}$$

Donc le *déterminant* est nul, quels que soient a, a', a'', b, etc.

Or, ce déterminant est

$$\left\{\begin{array}{llll} \Sigma a^2, & \Sigma ab, & \Sigma ac, & \Sigma ad, \\ \Sigma ba, & \Sigma b^2, & \Sigma bc, & \Sigma bd, \\ \Sigma ca, & \Sigma cb, & \Sigma c^2, & \Sigma cd, \\ \Sigma da, & \Sigma db, & \Sigma dc, & \Sigma d^2. \end{array}\right.$$

Remplaçons

$$\begin{array}{lll} a,\ a',\ a'' & \text{par} & q_1,\ q_3,\ q_5; \\ b,\ b',\ b'' & & q_2,\ q_4,\ q_6; \\ c,\ c',\ c'' & & q'_1,\ q'_3,\ q'_5; \\ d,\ d',\ d'' & & q'_2,\ q'_4,\ q'_6. \end{array}$$

Le déterminant qui est nul sera donc

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{llll} u, & Q, & w, & R_1; \\ Q, & u_1, & R, & w_1; \\ w, & R, & v, & Z; \\ R_1, & w_1, & Z, & v_1. \end{array}\right.$$

Si nous désignons par D ce déterminant, en l'égalant à zéro, on aura une équation du deuxième degré qui déterminera Z en fonction des variables u, u_1, etc. J'ai effectué ce calcul, et j'ai retrouvé l'équation (8).

Cette seconde méthode pour déterminer Z a été donnée par M. Bertrand, dans son cours au Collége de France; il avait simplement indiqué la première.

Il s'agit maintenant de trouver l'expression du multiplicateur du système (1); j'y suis parvenu par plusieurs méthodes.

Première méthode.

Partant de l'équation qui définit le multiplicateur, on voit qu'elle se réduit à

$$(10)\qquad \frac{d.\log M}{dt} + \frac{dZ}{dR} + \frac{dZ}{dR_1} = 0.$$

Mais l'équation (8) donnant

$$\frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dZ}\cdot\frac{dZ}{dR} = 0, \qquad \frac{dD}{dR_1} + \frac{dD}{dZ}\cdot\frac{dD}{dR_1} = 0,$$

l'équation (10) pourra se mettre sous cette forme :

$$(11)\qquad \frac{d\log M}{dt} = \frac{\frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1}}{\frac{dD}{dZ}}.$$

Or

$$(12)\qquad \frac{dD}{dZ} = 2(AZ + B) = \pm 2\sqrt{B^2 - AC},$$

en ayant égard à l'équation (7); il est donc naturel de chercher si $\frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1}$ ne serait pas la différentielle de $B^2 - AC$.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} E &= Q(R + R_1) - uw_1 - u_1 w, \\ F &= uv_1 R + u_1 v R_1 - RR_1(R + R_1) \\ &\quad + ww_1(R + R_1) - v_1 w Q - v w_1 Q, \end{aligned}$$

on a

$$(13)\qquad \frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1} = 2(EZ + F);$$

or

$$\frac{d}{dt}(B^2 - AC) = 2B\frac{dB}{dt} - A\frac{dC}{dt} - C\frac{dA}{dt}.$$

Or les équations (1) étant mises sous la forme

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = 2w, && \frac{du_1}{dt} = 2w_1, && \frac{dQ}{dt} = R + R_1; \\ &\frac{dv}{dt} = 2(\mu w + \lambda R), && \frac{dv_1}{dt} = 2(\mu_1 w_1 + \lambda R_1), \\ &\frac{dw}{dt} = v + (\mu u + \lambda Q), && \frac{dw_1}{dt} = v_1 + (\mu_1 u_1 + \lambda Q), \\ &\frac{dR}{dt} = Z + (\mu Q + \lambda u_1), && \frac{dR_1}{dt} = Z + (\mu_1 Q + \lambda u), \end{aligned}\right.$$

on trouve

$$2B\frac{dB}{dt} = 2B(EZ - F) - 2AB[\mu R_1 + \mu_1 R + \lambda(w + w_1)]$$

$$-A\frac{dC}{dt} = -2AFZ + 2AB[\mu R_1 + \mu_1 R + \lambda(w + w_1)],$$

$$-C\frac{dA}{dt} = 2CE;$$

donc

$$(15)\qquad \frac{d}{dt}(B^2 - AC) = 2[(BE - AF)Z + CE - BF].$$

Or, en vertu des relations (8), (12) et (13), on a

$$\left(\frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1}\right)\frac{dD}{dZ} = 4[(AF - BE)Z + BF - CE];$$

donc

$$(16)\qquad \left(\frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1}\right)\frac{dD}{dZ} = -2\frac{d.(B^2 - AC)}{dt};$$

par conséquent,

$$\frac{d.\log M}{dt} = -\frac{2\frac{d}{dt}(B^2 - AC)}{\left(\frac{dD}{dZ}\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d.\log(B^2 - AC)}{dt};$$

car

$$\frac{dD}{dZ} = 2(AZ + B) = \pm 2\sqrt{B^2 - AC};$$

donc

$$(17)\qquad M = \frac{1}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{1}{AZ + B}.$$

Le radical peut être affecté du double signe.

Deuxième méthode.

Posons

$$\log M = N,$$

et développons le premier terme de l'équation (10); en ayant égard aux formules (1), nous obtiendrons

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2w\frac{dN}{du} + 2w_1\frac{dN}{du_1} + v\frac{dN}{dv} + v_1\frac{dN}{dv_1} + Z\left(\frac{dN}{dR} + \frac{dN}{dR_1}\right) + (R + R_1)\frac{dN}{dQ} + \frac{dZ}{dR} + \frac{dZ}{dR_1} \\ \quad - 2\sum \psi'(\beta_3^2)m_1 m_2 \left\{\begin{array}{l} (\alpha_1 - \alpha_2)^2\left(2w\frac{dN}{dv} + u\frac{dN}{dv} + Q\frac{dN}{dR}\right) \\ + (\beta_1 - \beta_2)^2\left(2w_1\frac{dN}{dv_1} + u_1\frac{dN}{dv_1} + Q\frac{dN}{dR_1}\right) \\ + (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)\left(\begin{array}{l} 2R\frac{dN}{dv} + Q\frac{dN}{dv} + u_1\frac{dN}{dR} \\ + 2R_1\frac{dN}{dv_1} + Q\frac{dN}{dv_1} + u\frac{dN}{dR_1}\end{array}\right)\end{array}\right\} \end{array}\right\} =$$

Le multiplicateur doit vérifier cette équation ; cherchons s'il peut être indépendant des masses.

Il suffit, pour cela, que l'on ait

$$(19)\quad \begin{cases} 2w\dfrac{dN}{dv} + u\dfrac{dN}{dw} + Q\dfrac{dN}{dR} = 0, \\ 2R\dfrac{dN}{dv} + Q\dfrac{dN}{dw} + u_1\dfrac{dN}{dR} = 0; \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} 2w_1\dfrac{dN}{dv_1} + u_1\dfrac{dN}{dw_1} + Q\dfrac{dN}{dR_1} = 0, \\ 2R_1\dfrac{dN}{dv_1} + Q\dfrac{dN}{dw_1} + u\dfrac{dN}{dR_1} = 0. \end{cases}$$

Voyons quelle forme imposeront à N les conditions (19) et (20).

Intégrons la première des équations (19), en regardant N comme fonction de v, w et R. On a

$$\frac{dv}{2w} = \frac{dw}{u} = \frac{dR}{Q} = \frac{dN}{0},$$

d'où l'on déduit d'abord

$$N = C',$$
$$uv - w^2 = C_1,$$
$$Qw - uR = C_2.$$

De la dernière tirons la valeur de w; portons-la dans

$$Qdv - 2wdR = 0,$$

et intégrons en regardant C_2 comme constante, on trouve

$$Q^2v + uR^2 - 2wQR = C_3;$$

nous pouvons prendre

$$N = \varphi(C_1, C_3).$$

Exprimons maintenant que N satisfait à la seconde des équations (19), on arrive à

$$\frac{dN}{dC_1} + u_1\frac{dN}{dC_3} = 0.$$

C_1 et C_3 étant indépendants de u_1, u_1 est une constante dans l'intégration; on a donc

$$u_1 C_1 - C_3 = \text{const.} = \alpha;$$

α ne renfermant pas v_1, w_1, R_1, nous arrivons à cette conclusion, que

$$N = F(\alpha, v_1, w_1, R_1), \tag{21}$$

F étant une fonction arbitraire.

Maintenant, si l'on exprime que N vérifie les relations (20), on trouve définitivement que N doit être de la forme

$$N = F(\alpha, \alpha_1), \tag{22}$$

où l'on a

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= uu_1 v - u_1 w^2 - Q^2 v - uR^2 + 2wQR, \\ \alpha_1 &= uu_1 v_1 - uw_1^2 - Q^2 v_1 - u_1 R_1^2 + 2w_1 QR_1. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Il faut de plus que N satisfasse à l'équation suivante à laquelle se réduit l'équation (18),

$$\left\{\begin{aligned} &2w\frac{dN}{du} + 2w_1\frac{dN}{du_1} + v\frac{dN}{dw} + v_1\frac{dN}{dw_1} + Z\left(\frac{dN}{dR} + \frac{dN}{dR_1}\right) \\ &\qquad + (R + R_1)\frac{dN}{dQ} + \frac{dZ}{dR} + \frac{dZ}{dR_1} = 0. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Or, si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} P &= uvw_1 - w_1 w^2 - vQR_1 + wRR_1 + Z(wQ - uR), \\ P_1 &= u_1 v_1 w - ww_1^2 - v_1 QR + w_1 RR_1 + Z(w_1 Q - u_1 R_1), \end{aligned}\right. \tag{25}$$

l'équation (24) deviendra

$$2P\frac{dN}{dz} + 2P_1\frac{dN}{dz_1} + \frac{dZ}{dR} + \frac{dZ}{dR_1} = 0, \tag{26}$$

ou

$$\left(2P\frac{dD}{dZ}\right)\frac{dN}{dz} + \left(2P_1\frac{dD}{dZ}\right)\frac{dN}{dz_1} = \frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1} \tag{27}$$

Or on vérifie que

$$P\frac{dD}{dZ} = -\alpha\frac{dD}{dR},$$

$$P_1\frac{dD}{dZ} = -\alpha_1\frac{dD}{dR_1},$$

ce qui donne

$$(28)\qquad 2\alpha\frac{dD}{dR}\cdot\frac{dN}{d\alpha} + 2\alpha_1\frac{dD}{dR_1}\,\frac{dN}{d\alpha_1} + \frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1} = 0.$$

Pour intégrer cette équation, il faut intégrer le système

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{l} dN + \dfrac{d\alpha}{2\alpha}\cdot\dfrac{\dfrac{dD}{dR} + \dfrac{dD}{dR_1}}{\dfrac{dD}{dR}} = 0, \\[2ex] dN + \dfrac{d\alpha_1}{2\alpha_1}\cdot\dfrac{\dfrac{dD}{dR} + \dfrac{dD}{dR_1}}{\dfrac{dD}{dR_1}} = 0, \\[2ex] \dfrac{d\alpha}{\alpha}\cdot\dfrac{dD}{dR} = \dfrac{d\alpha_1}{\alpha_1}\cdot\dfrac{dD}{dR}. \end{array}\right.$$

La troisième relation nous donne

$$\frac{\dfrac{dD}{dR} + \dfrac{dD}{dR_1}}{\dfrac{dD}{dR}} = \frac{\alpha_1 d\alpha + \alpha d\alpha_1}{\alpha_1 d\alpha},\qquad \frac{\dfrac{dD}{dR} + \dfrac{dD}{dR_1}}{\dfrac{dD}{dR_1}} = \frac{\alpha_1 d\alpha + \alpha d\alpha_1}{\alpha d\alpha_1}.$$

Alors les deux premières prennent la même forme, qui est la suivante :

$$dN + \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\alpha_1}{\alpha_1}\right) = 0,$$

d'où

$$\log M + \frac{1}{2}\log(\alpha\alpha_1) = \text{const.};$$

donc

$$2(\log M + \log\sqrt{\alpha\alpha_1}) = C$$

est l'intégrale de l'équation (28).

On en déduit

$$(30) \qquad M = \frac{1}{\sqrt{\alpha\alpha_1}},$$

qui est l'expression du multiplicateur cherché.

On vérifie facilement que

$$\alpha\alpha_1 = B^2 - AC,$$

que α est le déterminant

$$\begin{cases} u, & Q, & w, \\ Q, & u, & R, \\ w, & R, & v, \end{cases}$$

et que α_1 est le déterminant

$$\begin{cases} u_1, & Q, & w_1, \\ Q, & u, & R_1, \\ w_1, & R_1, & v_1. \end{cases}$$

Troisième méthode.

Notre point de départ sera la formule

$$(31) \qquad \frac{d.\log M}{dt} = \frac{\frac{dD}{dR} + \frac{dD}{dR_1}}{\frac{dD}{dZ}}$$

D étant le déterminant

$$\begin{cases} u, & Q, & w, & R_1, \\ Q, & u_1, & R, & w_1, \\ w, & R, & v, & Z, \\ R_1, & w_1, & Z, & v_1, \end{cases}$$

$\frac{dD}{dR}$ est égal à la somme des déterminants Δ, Δ',

$$\Delta \begin{cases} u, & Q, & R_1, \\ w, & R, & Z, \\ R_1, & w_1, & v_1, \end{cases} \qquad \Delta' \begin{cases} u, & w, & R_1, \\ Q, & R, & w_1 \\ R_1, & Z, & v_1, \end{cases}$$

$\frac{dD}{dR_1}$ est égal à la somme des déterminants Δ_1, Δ'_1,

$$\Delta_1 \begin{cases} Q, & u_1, & R, \\ w, & R, & v, \\ R_1, & w_1 & Z, \end{cases} \qquad \Delta'_1 \begin{cases} Q, & w, & R_1, \\ u_1, & R, & w_1 \\ R, & v, & Z, \end{cases}$$

$\frac{dD}{dZ}$ est égal à la somme des déterminants δ, δ',

$$\delta \begin{cases} u, & Q, & w, \\ Q, & u_1, & R, \\ R_1, & w_1, & Z, \end{cases} \qquad \delta' \begin{cases} u, & Q, & R_1, \\ Q, & u_1, & w_1, \\ w, & R, & Z. \end{cases}$$

Or un déterminant ne change ni en grandeur ni en signe quand on le renverse; donc

$$\Delta' = \Delta, \quad \Delta'_1 = \Delta_1, \quad \delta' = \delta,$$

et, par conséquent,

$$(32) \qquad \frac{d.\log M}{dt} = \frac{\Delta + \Delta_1}{\delta}:$$

or, le déterminant δ a la forme suivante, si l'on a égard aux relations (2):

$$\delta \begin{cases} (q_1^2 + q_3^2 + q_5^2), & (q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6), & (q_1 q'_1 + q_3 q'_3 + q_5 q'_5): \\ (q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6), & (q_2^2 + q_4^2 + q_6^2), & (q'_1 q_2 + q'_3 q_4 + q'_5 q_6): \\ (q_1 q'_2 + q_3 q'_4 + q_5 q'_6), & (q_2 q'_2 + q_4 q'_4 + q_6 q'_6), & (q'_1 q'_2 + q'_3 q'_4 + q'_5 q'_6). \end{cases}$$

Mais ce déterminant est égal au produit des deux déterminants

$$m \begin{cases} q_1, & q_3, & q_5, \\ q_2, & q_4, & q_6, \\ q'_1, & q'_3, & q'_5; \end{cases} \qquad n \begin{cases} q_1, & q_3, & q_5. \\ q_2, & q_4, & q_6, \\ q'_2, & q'_4, & q'_6. \end{cases}$$

De même le déterminant Δ étant égal à

$$\Delta \left\{ \begin{array}{lll} (q_1^2+q_3^2+q_5^2), & (q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6), & (q_1q'_2+q_3q'_4+q_5q'_6); \\ (q_1q'_1+q_3q'_3+q_5q'_5), & (q'_1q_2+q'_3q_4+q'_5q_6), & (q'_1q'_2+q'_3q'_4+q'_5q'_6); \\ (q_1q'_2+q_3q'_4+q_5q'_6), & (q_2q'_2+q_4q'_4+q_6q'_6), & (q'^2_2+q'^2_4+q'^2_6). \end{array} \right.$$

est aussi le produit des deux déterminants

$$\alpha \left\{ \begin{array}{l} q_1, \ q_3, \ q_5, \\ q'_1, \ q'_3, \ q'_5, \\ q'_2, \ q'_4, \ q'_6; \end{array} \right. \qquad \beta \left\{ \begin{array}{l} q_1, \ q_3, \ q_5, \\ q_2, \ q_4, \ q_6, \\ q'_2, \ q'_4, \ q'_6; \end{array} \right.$$

et Δ_1 étant

$$\Delta_1 \left\{ \begin{array}{lll} q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6), & (q_2^2+q_4^2+q_6^2), & (q'_1q_2+q'_3q_4+q'_5q_6); \\ (q_1q'_2+q_3q'_4+q_5q'_5), & (q'_1q_2+q'_3q_4+q'_5q_6), & (q'^2_1+q'^2_3+q'^2_5); \\ q_1q'_2+q_3q'_4+q_5q'_6), & (q_2q'_2+q_4q'_4+q_6q'_6), & (q'_1q'_2+q'_3q'_4+q'_5q'_6), \end{array} \right.$$

peut être remplacé par le produit des deux déterminants :

$$\alpha_1 \left\{ \begin{array}{l} q_1, \ q_3, \ q_5, \\ q_2, \ q_4, \ q_6, \\ q'_1, \ q'_3, \ q'_5; \end{array} \right. \qquad \beta_1 \left\{ \begin{array}{l} q_2, \ q_4, \ q_6, \\ q'_1, \ q'_3, \ q'_5, \\ q'_2, \ q'_4, \ q'_6. \end{array} \right.$$

On aura donc

$$(33) \qquad \frac{d \,.\, \log \mathrm{M}}{dt} = \frac{\alpha\beta + \alpha_1\beta_1}{mn}.$$

Or, on voit que

$$\beta = n, \quad \alpha_1 = m.$$

Comparons α et m; α est égal et de signe contraire à

$$\alpha' \left\{ \begin{array}{l} q_1, \ q_3, \ q_5, \\ q'_2, \ q'_4, \ q'_6, \\ q'_1, \ q'_3, \ q'_5, \end{array} \right.$$

que l'on déduit de α en changeant la deuxième ligne horizontale en la troisième, et *vice versâ*.

Or, α' se déduirait de m en changeant

$$q_2 \text{ en } q'_2, \quad q_4 \text{ en } q'_4, \quad q_6 \text{ en } q'_6;$$

mais on a

$$m = aq_2 + bq_4 + cq_6,$$

après avoir posé

$$a = q_5 q'_3 - q_3 q'_5,$$
$$b = q_1 q'_5 - q_5 q'_1,$$
$$c = q_3 q'_1 - q_1 q'_3.$$

Donc

$$\alpha' = aq'_2 + bq'_4 + cq'_6.$$

Or,

$$\frac{dm}{dt} = aq'_2 + bq'_4 + cq'_6 + q_2 \frac{da}{dt} + q_4 \frac{db}{dt} + q_6 \frac{dc}{dt}.$$

Ayant égard aux équations suivantes, établies dans le Mémoire de M. Bertrand :

$$\frac{dq'_1}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_2].$$

$$\frac{dq'_2}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_1],$$

$$\frac{dq'_3}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_3 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_4],$$

$$\frac{dq'_4}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_4 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_3],$$

$$\frac{dq'_5}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_5 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_6],$$

$$\frac{dq'_6}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_6 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_5],$$

on vérifie facilement que

$$q_2 \frac{da}{dt} + q_4 \frac{db}{dt} + q_6 \frac{dc}{dt} = 0;$$

donc

$$\alpha = -\alpha' = -\frac{dm}{dt}.$$

Un calcul analogue conduirait à la conclusion

$$\beta_1 = -\frac{dn}{dt},$$

par conséquent,

$$\frac{d.\log M}{dt} = -\frac{m\frac{dn}{dt} + n\frac{dm}{dt}}{mn} = -\frac{d\log mn}{dt}.$$

$$(34) \qquad M = \frac{1}{mn};$$

c'est une autre forme du multiplicateur que nous cherchons. M. Bertrand avait annoncé ce résultat dans son cours.

Nous trouvons donc, pour les différentes formes d'un des multiplicateurs du système (1),

$$(35) \qquad M = \frac{1}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\alpha}} = \frac{1}{AZ + B} = \frac{1}{mn},$$

ou

$$Z = q'_1 q'_2 + q'_3 q'_4 + q'_5 q'_6 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

$$A = uu_1 - Q^2,$$

$$B = Q(RR_1 + vw_1) - uw_1 R - u_1 vR_1.$$

$$C = uv_1 R^2 + u_1 vR_1^2 - R^2 R_1^2 + 2 ww_1 RR_1 - 2 v_1 wQR$$
$$- 2 vw_1 QR_1 - uu_1 vv_1 + vv_1 Q^2 + uvw_1^2$$
$$+ u_1 v_1 w^2 - w^2 w_1^2;$$

α est le déterminant

$$\begin{vmatrix} u, & Q, & w, \\ Q, & u_1, & R, \\ w, & R, & v, \end{vmatrix}$$

α_1 est le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1, & Q, & w_1, \\ Q, & u, & R_1, \\ w_1, & R_1, & v_1, \end{vmatrix}$$

m est le déterminant

$$\left\{\begin{array}{lll} q_1, & q_3, & q_5, \\ q_2, & q_4, & q_6, \\ q'_1, & q'_3, & q'_5, \end{array}\right.$$

et n le déterminant

$$\left\{\begin{array}{lll} q_1, & q_3, & q_5, \\ q_2, & q_4, & q_6, \\ q'_2, & q'_4, & q'_6. \end{array}\right.$$

NOTE

SUR LA DISCONTINUITÉ DES VALEURS DES SÉRIES

ET SUR LES MOYENS DE LA RECONNAITRE;

PAR M. DUHAMEL.

Considérons une série dont tous les termes soient des fonctions continues d'une variable x, et qui soit convergente tant que x reste compris entre certaines limites déterminées, condition que nous supposerons toujours satisfaite. Admettons, en outre, que chaque terme ne puisse prendre qu'une seule valeur pour une valeur donnée quelconque de x, et qu'il en soit de même, par conséquent, pour la somme d'un nombre fini quelconque de ces termes.

Cela posé, il pourra arriver deux cas : ou la limite de la somme des termes de la série variera avec x d'une manière continue; ou bien, pour certaines valeurs particulières de x, elle passera brusquement d'une valeur à une autre qui en différera d'une quantité finie.

Ainsi, par exemple, on sait qu'on peut développer une fonction de x, donnée pour toutes les valeurs de x comprises entre deux valeurs α, β, suivant une série dont les termes soient les sinus et les cosinus des multiples entiers d'un certain arc. Si la fonction développée est continue, la somme de la série qui lui est toujours égale l'est aussi. Mais si la fonction proposée est formée d'une fonction continue $\varphi(x)$ jusqu'à $x = a$, puis d'une autre fonction continue $\psi(x)$ lorsque x est plus grand que a, et que l'on n'ait pas

$$\varphi(a) = \psi(a),$$

on sait que la série provenant de cette fonction en représentera exactement les valeurs pour toutes les valeurs de x, excepté a; et que,

pour cette dernière, la somme de la série, qui est toujours convergente, a une valeur déterminée qui n'est ni $\varphi(a)$ ni $\psi(a)$, mais leur demi-somme. On a donc ainsi un exemple de séries convergentes dont les termes sont des fonctions continues de la variable, et dont la somme reste cependant une fonction discontinue, quoique toujours déterminée.

C'est de ce cas singulier que nous allons nous occuper; et nous commencerons par quelques remarques sur la somme des termes de la série, dans le voisinage de la valeur particulière de la variable à laquelle correspond cette discontinuité.

Soit la série

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Désignons par s la limite de la somme de ses termes pour une valeur quelconque de la variable x dont les termes sont des fonctions continues; par s_n la somme des n premiers termes; et par r_n la limite de la somme des suivants, de telle sorte que l'on ait toujours

$$s = s_n + r_n.$$

Soit a la valeur particulière de x à laquelle correspond la discontinuité; $\varphi(x)$ la fonction continue que représente s tant que l'on a

$$x < a;$$

$\psi(x)$ la valeur de s lorsque l'on a

$$x > a;$$

et admettons que $\varphi(a)$ et $\psi(a)$ soient inégaux. Remarquons d'abord que, pour connaître la valeur de s relative à une valeur donnée de x, on peut procéder de deux manières différentes. On peut commencer par substituer la valeur α à x dans tous les termes de la série, et chercher ensuite la limite vers laquelle tend la somme de ces termes devenus entièrement numériques, à mesure que leur nombre augmente indéfiniment. C'est ainsi que l'on procède quand on n'a en vue que l'évaluation même de la somme.

On peut, au lieu de cela, considérer d'abord la somme s_n des

n premiers termes, en attribuant à x une valeur qui diffère de a d'une quantité qui soit une fonction arbitraire de n, assujettie à devenir nulle pour n infini. Faisant ensuite croître n indéfiniment, la valeur de x tendra vers la limite a; et la limite vers laquelle tendra s_n pourra encore être appelée la valeur de s pour $x = a$.

Ces deux manières de procéder donnent généralement le même résultat. Mais il arrive quelquefois aussi non-seulement que cette coïncidence n'a pas lieu, mais que le résultat obtenu par le second procédé est indéterminé et dépend de la relation arbitraire que l'on établit entre x et n.

Nous allons voir que cette circonstance singulière se présente lorsque la fonction de x, qui a été développée en série, passe brusquement d'une valeur à une autre, qui en diffère d'une quantité finie; et, pour fixer les idées, nous considérerons d'abord les séries périodiques; le terme général u_n sera de la forme

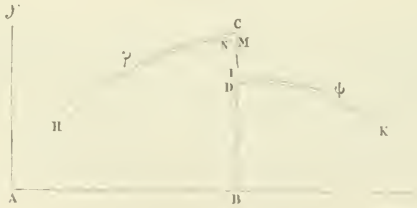
$$u_n = \mathrm{M} \sin \frac{2n\pi x}{l} + \mathrm{N} \cos \frac{2n\pi x}{l}.$$

l désignant l'intervalle qui correspond à une période.

Construisons la courbe ayant pour équation

$$y = s_n.$$

Elle sera continue et ne sera coupée qu'en un seul point par toute



parallèle à l'axe des y. Elle variera de forme à mesure que n augmentera indéfiniment; elle s'approchera de plus en plus de la courbe HC

ayant pour équation

$$y = \varphi(x),$$

lorsque l'on prendra $x <$ AB pris égal à a; elle tendra vers la courbe

$$y = \psi(x)$$

pour $x > a$; pour $x = a$, la somme s_n tendant vers

$$\frac{1}{2}[\varphi(a) + \psi(a)] \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(\mathrm{BC} + \mathrm{BD}),$$

la courbe coupera la droite BC en un point dont la position limite sera le milieu de CD.

Il résulte nécessairement de tout cela, que la courbe continue $y = s_n$ tend indéfiniment à passer par un point quelconque de la courbe CH, de la courbe DK et de la portion de droite CD; et c'est ce qu'avait très-bien remarqué Fourier.

Voici maintenant une conséquence très-simple de cette remarque.

Prenons une ordonnée quelconque BM, comprise entre BC et BD, et menons par le point M une parallèle à l'axe des x; elle rencontrera la courbe $y = s_n$ en un point N, dont nous désignerons l'abscisse par x_1, et qui s'approchera indéfiniment de M à mesure que n augmentera. En laissant BM constant et faisant croître n indéfiniment, x_1 sera une fonction de n telle, que l'ordonnée de la courbe variable sera constamment égale à BM; et, par conséquent, on peut énoncer la proposition suivante :

« Si l'on fait la somme des n premiers termes de la série proposée, » et que l'on substitue à x une fonction de n qui tende vers a lors- » que x croît indéfiniment, on peut choisir cette fonction de telle » sorte, que la somme tende vers une valeur quelconque comprise » entre $\varphi(a)$ et $\psi(a)$. »

Passons maintenant au cas général où les termes de la série (1) sont des fonctions de x de forme quelconque, satisfaisant aux conditions énoncées. Construisons de même les courbes CH, DK, dont l'une ait pour ordonnée $\varphi(x)$ et l'autre $\psi(x)$, et qui, pour $x = a =$ AB,

donnent deux ordonnées inégales BC, BD. La valeur limite de s_n ne sera peut-être pas $\frac{1}{2}(BC + BD)$, comme dans le cas précédent; de sorte que la limite I de la rencontre de la courbe variable avec la droite BC pourra être différente du milieu de CD; mais, comme la courbe $y = s_n$ est continue, qu'elle ne peut être rencontrée qu'en un seul point par toute parallèle à BC, et que, de plus, elle s'approche indéfiniment des points C, D, il s'ensuit nécessairement qu'elle s'approche indéfiniment de tous les points de la droite CD. Le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure subsiste donc et conduit à cette proposition générale :

« Lorsqu'une série convergente est composée de termes qui sont » fonctions continues de x et ne peuvent recevoir qu'une seule valeur » pour une valeur donnée de x, si l'on admet qu'elle représente une » fonction continue $\varphi(x)$ quand x est plus petit qu'une quantité » fixe a, tandis que, pour $x > a$, elle en représente une autre $\psi(x)$, » telle que $\varphi(a)$ et $\psi(a)$ soient inégaux; si dans la somme s_n on fait » tendre x vers a en même temps que n croît indéfiniment, on pourra » prendre pour x une telle fonction de n que, tandis qu'elle tend » vers a, la somme s_n tende vers une valeur quelconque comprise » entre $\varphi(a)$ et $\psi(a)$. »

Remarque. — Il est bon d'observer que la partie de la courbe variable qui s'approche indéfiniment de la portion IC de CD, correspond à $x < a$, et que la partie de la même courbe qui tend vers l'autre portion ID correspond à $x > a$.

Limite du reste. — Le reste r_n, correspondant à s_n, étant la limite de la somme des termes de la série à partir du dernier qui entre dans s_n, on a, pour une valeur quelconque de x,

$$s = s_n + r_n.$$

Supposons maintenant que l'on fasse

$$x = a + \varepsilon,$$

ε désignant une quantité positive très-petite, on aura

$$s_n + r_n = \psi(a + \varepsilon),$$

quantité qui peut être aussi voisine que l'on voudra de $\varphi(a)$, en prenant ε suffisamment petit.

Or, on peut supposer que ε soit une fonction de n qui tende vers zéro, de telle sorte que s_n tende vers une valeur quelconque s_1, comprise entre BI et $\psi(a)$; donc, dans cette hypothèse, r_n tendra vers $\psi(a) - s_1$. Ainsi, en supposant $x > a$, r_n pourra avoir toutes les valeurs comprises entre o et — DI.

Si l'on supposait, en second lieu, $x = a - \varepsilon$, la valeur de s serait $\varphi(a - \varepsilon)$, et l'on aurait

$$s_n + r_n = \varphi(a - \varepsilon).$$

Donc, si l'on suppose que ε soit une fonction de n tendant vers zéro, de manière à ce que s_n tende vers une valeur quelconque s_2 comprise entre BI et $\varphi(a)$, r_n tendra vers

$$\varphi(a) - s_2;$$

de sorte que r_n sera susceptible d'avoir toutes les valeurs possibles entre o et + CI, lorsque x tendra vers a, en restant toujours au-dessous.

Direction de la tangente dans le voisinage du point singulier. — D'après ce qui a été dit sur la nature de la courbe dont l'équation est

$$y = s_n,$$

la tangente au point dont l'abscisse est $a + \varepsilon$ tendra vers celle de la courbe $y = \psi(x)$, si on laisse ε constant, quelque petit qu'il soit, et que n croisse indéfiniment. Mais, si on lie la valeur de ε à celle de x, de manière que le point de la courbe s'approche indéfiniment d'un point déterminé de CD qui ne soit pas l'une de ses extrémités, la tangente à la courbe tendra indéfiniment vers la direction de cette parallèle, qui est la limite de la courbe dans la partie que l'on considère. Le passage d'une de ces directions extrêmes à l'autre se fera d'une manière continue, de sorte que la recherche de la direction de la tangente dans le voisinage de $x = a$ conduirait à un résultat indéterminé.

Considérons en particulier le point où la courbe $y = s_n$ coupe la droite CD; on aura son ordonnée en faisant $x = a$ dans tous les termes de s_n et les ajoutant ensuite; d'où l'on voit que ce point a pour limite celui que l'on trouve en faisant $x = a$ dans la série donnée, et par conséquent un certain point O de AB, qui sera même, en général, différent d'une de ses extrémités. La tangente en ce point, qui peut être variable ou fixe, tend donc à devenir parallèle à l'axe des y, puisque la courbe elle-même tend à s'y confondre des deux côtés de O, ou au moins d'un côté, si O tendait vers l'une des extrémités. Mais $\frac{ds_n}{dx}$ est le coefficient d'inclinaison de la tangente à la courbe $y = s_n$; donc, si l'on fait $x = a$ dans $\frac{ds_n}{dx}$, on aura une valeur qui croîtra indéfiniment avec n.

Ainsi la série des dérivées des termes de la proposée, ou

$$\frac{du_1}{dr} + \frac{du_2}{dr} + \ldots + \frac{du_n}{dr} + \ldots,$$

dans laquelle x est remplacé par a, a une somme infinie. On peut donc énoncer, en général, la proposition suivante :

« Si l'on a développé en série une fonction de x, qui a deux valeurs » différentes correspondantes à la valeur particulière a de la variable x, » la série des dérivées des termes de cette série aura une somme infinie » quand on y remplacera x par a. »

On pourra donc admettre que la somme d'une série sera continue pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites déterminées, lorsque la série des dérivées de ses termes ne deviendra infinie pour aucune des valeurs comprises entre ces limites; mais, si une valeur particulière de x la rendait infinie, on n'en conclurait pas nécessairement que la série proposée serait discontinue, parce que la tangente à la courbe $y = s_n$ peut évidemment tendre vers la direction de l'axe des y sans qu'il y ait solution de continuité.

Remarque. — Si la série des dérivées des termes d'une série est convergente, la limite s' de la somme de ses termes sera la dérivée de la limite s de la première; car on sait que l'intégrale indéfinie d'une fonc-

tion développée en série convergente est la somme des intégrales de ses termes.

Or, en intégrant les termes de s' on retrouve ceux de s; donc $\int s'dx$ et s ne peuvent différer que par une constante, et par conséquent elles ont la même dérivée. Mais la dérivée de $\int s'dx$ est s', donc aussi la dérivée de s est s'.

Cette proposition se trouve énoncée dans une Note de M. Cauchy.

Si une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x est convergente, sa somme sera une fonction continue de x.

Soit la série

$$(2) \qquad s = A + Bx^{\alpha} + Cx^{\beta} + \ldots + Mx^{\mu} + Nx^{\nu} + \ldots;$$

pour qu'elle soit convergente, il faut en général, comme on le sait, que le rapport de deux termes consécutifs qui s'éloignent indéfiniment du premier, finisse par être toujours au-dessous d'un nombre constant plus petit que l'unité. Soit l une quantité au-dessous de laquelle le rapport des coefficients N, M de deux termes consécutifs Mx^{μ}, Nx, finit par rester à mesure que l'on s'éloigne du premier; le rapport de ces deux termes sera moindre que $lx^{\nu-\mu}$; et si l'on a

$$lx^{\nu-\mu} < 1,$$

et que $\nu - \mu$ soit constant, la série sera convergente, puisque le rapport d'un terme au précédent finira par être constamment au-dessous d'une quantité déterminée plus petite que l'unité. Cette inégalité fait connaître une limite au-dessous de laquelle les valeurs de x rendent la série convergente; car elle donne, en désignant par d la différence $\nu - \mu$,

$$x < \frac{1}{\sqrt[d]{l}}.$$

Si la différence d ne reste pas la même, cette inégalité devra être satisfaite pour toutes les valeurs que d peut prendre dans tout le cours de la série.

Cela posé, en différentiant par rapport à x les termes de la série (2), on a la suivante :

$$(3) \qquad B\alpha x^{\alpha-1} + C\beta x^{\beta-1} + \ldots + M\mu x^{\mu-1} + N\nu x^{\nu-1} + \ldots.$$

Le rapport de deux termes consécutifs quelconques sera

$$(4) \qquad \frac{\nu}{\mu} \cdot \frac{N}{M} x^{\nu-\mu},$$

et ne diffère des correspondants dans la série (2) que par le facteur $\frac{\nu}{\mu}$, qui tend indéfiniment vers l'unité, puisque μ et ν croissent sans limite, tandis que leur différence reste finie. Il suit de là que l'expression (4) finit par être toujours au-dessous de $lx^{\nu-\mu}$, et que, par conséquent, la série (3) est convergente. D'où l'on conclut enfin que la somme de la série (2) est une fonction continue de x. Cette proposition avait été démontrée par Abel.

NOTE

Sur la décomposition de $\sin x$ *et* $\cos x$ *en un nombre infini de facteurs;*

PAR M. DUHAMEL.

Euler a donné, dans l'*Introduction à l'Analyse des infiniment petits*, les formules importantes au moyen desquelles on peut remplacer les sinus et cosinus par des produits de facteurs du premier degré, en nombre infini. Ses démonstrations n'avaient pas toute la rigueur désirable; on les a perfectionnées sous ce rapport, mais en leur faisant peut-être perdre un peu de leur simplicité. L'objet de cette Note est de réunir, autant qu'il m'a paru possible, les deux avantages.

Je commencerai par établir quelques propositions simples, qui retarderaient la marche du calcul si on les y laissait engagées.

Premier lemme. — Soient a, b deux arcs compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et $a < b$; on aura

$$\frac{\sin a}{\sin b} > \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{b}.$$

En effet, on sait que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ décroît lorsque x croît, depuis o jusqu'à $\frac{\pi}{2}$. D'où il résulte d'abord

$$\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin b}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin a}{\sin b} > \frac{a}{b}.$$

Il en résulte encore, en considérant les quatre valeurs o, a, b, $\frac{\pi}{2}$, de x, que les rapports suivants sont rangés par ordre de valeurs décrois-

santes

$$1, \quad \frac{\sin a}{a}, \quad \frac{\sin b}{b}, \quad \frac{1}{\frac{1}{2}\pi}.$$

Donc le rapport du second au troisième est moindre que celui du premier au quatrième, et, par conséquent,

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi}{2}\frac{a}{b}.$$

Ainsi, comme on l'avait énoncé, $\frac{\sin a}{\sin b}$ est compris entre

$$\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{b}.$$

Deuxième lemme. — Si l'on désigne par m un nombre entier quelconque, on aura

$$(1)\left\{\begin{array}{l} \cos mx = 2^{m-1}\cos^m x + A\cos^{m-2} x + B\cos^{m-4} x + \ldots \pm 1 \\ \text{si } m \text{ est pair, et} \\ \cos mx = 2^{m-1}\cos^m x + A\cos^{m-2} x + \ldots \pm M\cos x \\ \text{si } m \text{ est impair,} \end{array}\right.$$

A, B, ..., M désignant des valeurs numériques que nous n'avons pas besoin de déterminer.

On aura semblablement, pour $\sin mx$, les formules suivantes :

$$(2)\left\{\begin{array}{l} \sin mx = \sin x\,(2^{m-1}\cos^{m-1} x + A\cos^{m-3} x + \ldots \pm 1) \\ \text{si } m \text{ est impair, et} \\ \sin mx = \sin x\,(2^{m-1}\cos^{m-1} x + A\cos^{m-3} x + \ldots + M\cos x) \\ \text{si } m \text{ est pair.} \end{array}\right.$$

Ces diverses formules résultent de ce que les sinus ou les cosinus d'arcs croissants d'une quantité constante x forment deux séries récurrentes, ayant l'une et l'autre pour échelle de relation $2\cos x - 1$. En partant des deux premiers arcs 0 et x, on calculera facilement, au moyen de cette loi, les valeurs successives de

$$\cos 2x, \quad \cos 3x, \quad \cos 4x, \quad \text{etc.},$$

ainsi que de

$$\sin 2x, \quad \sin 3x, \quad \text{etc.}$$

La détermination générale des coefficients A, B, ..., M nous est inutile et demanderait des développements dans lesquels nous n'entrerons pas. Quant à la forme des expressions (1) et (2), elle résulte immédiatement de la loi de formation que nous venons d'indiquer. Elle s'aperçoit de suite pour les premières, et se généralise par un raisonnement si fréquemment employé, que nous croyons inutile de le rappeler.

Décomposition de $\cos mx$ *en* m *facteurs.*

Troisième lemme. — Les seconds membres des équations (1) étant des polynômes du degré m par rapport à $\cos x$, peuvent être décomposés en m facteurs de la forme $\cos x - \alpha$, α désignant une quelconque des valeurs de $\cos x$ qui annulent ces polynômes ou leur égal $\cos mx$. Or les valeurs de mx, qui annulent $\cos mx$, sont toutes renfermées dans l'expression générale

$$\frac{\pi}{2} \pm n\pi,$$

n désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. En les divisant par m, on aura les arcs dont les cosinus seront les différentes valeurs de α. Pour avoir toutes ces valeurs, il suffira de donner à n un nombre m de valeurs consécutives partant de o par exemple, ce qui conduira aux arcs suivants :

$$\frac{\pi}{2m}, \quad \frac{3\pi}{2m}, \quad \frac{5\pi}{2m}, \ldots, \quad \pi - \frac{\pi}{2m}.$$

La somme de deux quelconques de ces arcs, équidistants des extrêmes, est π; et si m est impair, le terme situé au milieu est égal à $\frac{\pi}{2}$. Et comme les cosinus de deux arcs dont la somme est π sont égaux et de signes contraires, les cosinus des arcs précédents ou les m valeurs de α seront

$$\pm \cos\frac{\pi}{2m}, \quad \pm \cos\frac{3\pi}{2m}, \ldots, \qquad \cos\frac{\pi}{2},$$

si m est impair, et

$$\pm \cos\frac{\pi}{2m}, \quad \pm \cos\frac{3\pi}{2m}, \ldots, \quad \pm \cos\frac{(m-1)\pi}{2m}$$

si m est pair.

On aura donc

$$\cos mx = 2^{m-1}\cos x\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{2m}\right)\cdots$$
$$\times\left[\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right)\right]$$

pour m impair, et

$$\cos mx = 2^{m-1}\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{2m}\right)\cdots$$
$$\times\left[\cos x + \cos\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]$$

pour m pair.

Ainsi, quel que soit le nombre entier m, $\cos mx$ se trouve décomposé en m facteurs du premier degré par rapport à $\cos x$, ou, en multipliant les facteurs qui ne diffèrent que par le signe du second terme, et observant qu'on a en général

$$\cos^2 u - \cos^2 v = \sin^2 v - \sin^2 u,$$

$$\cos mx = 2^{m-1}\cos x\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\ldots$$
$$\times\left[\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \sin^2 x\right]$$

pour m impair, et

$$\cos mx = 2^{m-1}\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\ldots$$
$$\times\left[\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \sin^2 x\right)$$

pour m pair.

On peut remarquer qu'en faisant $x = 0$ dans ces formules, on obtient les relations suivantes :

$$\sin^2\frac{\pi}{2m}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{2m}\ldots\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

si m est impair, et

$$\sin^2\frac{\pi}{2m}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{2m}\ldots\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{1}{2^{m-1}}$$

si m est pair.

En y ayant égard, les formules précédentes deviennent :

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l}\cos mx=\cos x\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left[1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{(m-2)\pi}{2m}}\right]\\ \text{pour } m \text{ impair, et}\\ \cos mx=\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left[1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{(m-1)\pi}{2m}}\right]\\ \text{pour } m \text{ pair.}\end{array}\right.$$

Décomposition de sin mx *en* m *facteurs.*

Quatrième lemme. — Dans les formules (2), le polynôme du degré $m-1$ par rapport à $\cos x$ est rendu nul par les valeurs de x correspondantes à $\sin mx=0$. Les valeurs de mx qui satisfont à cette dernière condition sont renfermées dans l'expression générale $n\pi$, n désignant un nombre entier quelconque positif ou négatif. Mais comme un polynôme de degré $m-1$ ne peut avoir plus de $m-1$ racines, il suffira de prendre $m-1$ valeurs de $\frac{n\pi}{m}$, donnant des cosinus différents, et n'annulant pas le facteur $\sin x$; ces cosinus seront les racines du polynôme. Les arcs ainsi obtenus seront

$$\frac{\pi}{m},\ \frac{2\pi}{m},\ \frac{3\pi}{m},\ldots,\ \pi-\frac{\pi}{m}.$$

Tous ces arcs étant compris entre 0 et π ont des cosinus différents, et la somme de deux quelconques équidistants des extrêmes étant π, les cosinus sont, deux à deux, égaux et de signes contraires. Si m est pair, un des arcs sera $\frac{\pi}{2}$, et le cosinus correspondant sera nul. Cela n'arrivera pas si m est impair ; et c'est ce qu'indiquent immédiatement les

formules (2). D'après cela, on aura

$$\sin mx = 2^{m-1}\sin x\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos x - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\ldots$$
$$\times\left[\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right)\right]\left[\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right)\right]$$

si m est impair, et

$$\sin mx = 2^{m-1}\sin x\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{m}\right)$$
$$\times\left(\cos x - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{2\pi}{m}\right)\ldots$$
$$\times\left[\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right)\right]\cos x$$

si m est pair; ou, en réunissant les facteurs deux à deux, et introduisant les sinus au lieu des cosinus,

$$\sin mx = 2^{m-1}\sin x\left(\sin^2\frac{\pi}{m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{m} - \sin^2 x\right)\ldots$$
$$\times\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right) - \sin^2 x\right]$$

si m est impair, et

$$\sin mx = 2^{m-1}\sin x\cos x\left(\sin^2\frac{\pi}{m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{m} - \sin^2 x\right)\ldots$$
$$\times\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right) - \sin^2 x\right]$$

si m est pair.

On simplifiera ces formules en remarquant que, si on les divise par x, et qu'on fasse tendre x vers o, on obtient les suivantes :

$$2^{m-1}\sin^2\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{2\pi}{m}\ldots\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right) = m$$

pour m impair, et

$$2^{m-1}\sin^2\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{2\pi}{m}\ldots\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right) = m$$

pour m pair.

Les formules précédentes deviennent, d'après ces relations :

$$(4)\quad \begin{cases} \sin mx = m \sin x \left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 \dfrac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 \dfrac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left[1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2m}\right)}\right] \\ \text{pour } m \text{ impair, et} \\ \sin mx = m \sin x \cos x \left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 \dfrac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 \dfrac{2\pi}{m}}\right)\cdots \\ \qquad \times \left[1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{m}\right)}\right] \\ \text{pour } m \text{ pair.} \end{cases}$$

Développement de $\cos x$ *en un nombre infini de facteurs.*

Si dans les formules (3) on change la quantité arbitraire x en $\frac{x}{m}$, elles deviennent

$$(5)\quad \begin{cases} \cos x = \cos \dfrac{x}{m}\left(1 - \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{m}}{\sin^2 \dfrac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{m}}{\sin^2 \dfrac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left[1 - \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{m}}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{m}\right)}\right] \\ \text{pour } m \text{ impair, et} \\ \cos x = \left(1 - \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{m}}{\sin^2 \dfrac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{m}}{\sin^2 \dfrac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left[1 - \dfrac{\sin^2 \dfrac{\pi}{m}}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2m}\right)}\right] \\ \text{pour } m \text{ pair;} \end{cases}$$

et comme m est un nombre entier quelconque, $\cos x$ se trouve ainsi représenté par le produit d'un nombre arbitraire de facteurs.

La question que nous nous proposons ici est de déterminer la forme vers laquelle tend la valeur constante du second membre, lorsque le nombre de ces facteurs croît indéfiniment.

Si l'on considère un facteur quelconque $1 - \dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{m}}{\sin^2 \dfrac{n\pi}{2m}}$, n désignant

un nombre impair aussi grand que l'on voudra; les arcs $\frac{x}{m}$, $\frac{2\pi}{nm}$ tendant vers zéro lorsque m croît indéfiniment, le rapport de leurs sinus aura pour limite le rapport des arcs $\frac{nx}{2\pi}$, et la limite du facteur sera $1 - \frac{4x^2}{n^2\pi^2}$.

Comme d'ailleurs le facteur $\cos\frac{x}{m}$ tend vers l'unité, on arrive d'abord à cette conclusion, que, quelque grand que soit le nombre impair déterminé n, le produit des facteurs qui entrent dans les expressions (5), jusqu'à cette valeur de n, devient, lorsque m croît indéfiniment, aussi voisin qu'on voudra du suivant :

$$(6)\qquad \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Il resterait donc à trouver la limite vers laquelle tend le produit des facteurs suivants des expressions (5). Pour cela, nous remarquerons que, quelque grand qu'on suppose x, on peut toujours prendre un nombre impair μ tel, que l'on ait $x < \frac{\mu\pi}{2}$ ou $\frac{x}{m} < \frac{\mu\pi}{2m}$; et, en prenant $m > n$, $\frac{\mu\pi}{2m}$ sera plus petit que $\frac{\pi}{2}$. Les deux arcs $\frac{x}{m}$, $\frac{\mu\pi}{m}$ seront donc dans les conditions des deux arcs respectifs a, b dans le premier lemme; et l'on aura, par conséquent,

$$\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{\mu\pi}{2m}} > \frac{2x}{\pi} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{\mu\pi}{2m}} < \frac{x}{\mu},$$

d'où résulte

$$1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\mu\pi}{2m}} < 1 - \frac{4x^2}{\mu^2\pi^2}$$
$$> 1 - \frac{x^2}{\mu^2}.$$

Considérons maintenant les produits de facteurs en nombre infini dont ces deux dernières expressions seraient les formes générales,

c'est-à-dire

$$(7)\qquad \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{3x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

et

$$(8)\qquad (1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)\cdots$$

Ces produits tendent vers des limites déterminées à mesure que le nombre des facteurs augmente indéfiniment, parce que les séries des seconds termes de ces facteurs, pris avec le même signe, sont convergentes. Il résulte de là que l'on peut prendre un assez grand nombre de facteurs à partir du premier, dans les expressions (7) et (8), pour que la limite du produit des suivants soit aussi peu différente de l'unité qu'on le voudra. Et si, au lieu de prendre la limite du produit de ces derniers, on ne prenait que le produit d'un nombre limité d'entre eux, on aurait une quantité encore plus voisine de l'unité, puisque chacun de ces facteurs est plus petit que l'unité.

Ces remarques très-simples nous conduisent immédiatement à la solution de notre question.

En effet, il en résulte d'abord qu'on peut prendre n assez grand pour que les valeurs des expressions (6) et (7) aient une différence aussi petite que l'on voudra. Il en est donc de même du produit des facteurs correspondants à l'équation (6) dans les expressions (5), lorsque l'on suppose que m croît indéfiniment.

Quant aux facteurs qui suivent ceux-ci dans les formules (5) et dont le produit par les premiers est toujours $\cos x$, ils sont respectivement compris entre les deux facteurs de même rang dans les expressions (7) et (8). Leur produit total est donc compris entre les produits correspondants de ces dernières, dont nous venons de démontrer que les valeurs pouvaient différer de l'unité d'une quantité moindre que toute quantite donnée. Ce produit total peut donc lui-même différer aussi peu qu'on voudra de l'unité.

On voit donc que $\cos x$ peut être considéré comme composé de deux facteurs variables, dont l'un tend indéfiniment vers l'expression (7), et l'autre vers l'unité. Donc, enfin, $\cos x$ est égal à la valeur représentée par cette expression (7), quel que soit x.

D'où résulte la formule suivante,

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\left[1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]\cdots,$$

au moyen de laquelle $\cos x$ se trouve décomposé en une infinité de facteurs algébriques du premier ou du second degré, dont la formule générale est

$$1 \pm \frac{2x}{(2k+1)\pi}.$$

k désignant un nombre entier quelconque, et qui, égalé à zéro, donne toutes les racines de $\cos x = 0$.

Développement de $\sin x$ *en un nombre infini de facteurs.*

Les formules (4) deviennent, en remplaçant x par $\frac{x}{m}$,

$$\sin x = m \sin\frac{x}{m}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left[1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right)}\right]$$

pour m impair, et

$$\sin x = m \sin\frac{x}{m}\cos\frac{x}{m}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left[1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right)}\right]$$

pour m pair.

On a $m \sin\frac{x}{m} = x \cdot \frac{m}{x}\sin\frac{x}{m}$: et si l'on fait croître m indéfiniment, $\frac{m}{x}\sin\frac{x}{m}$ ou $\frac{\sin\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}$ tend vers l'unité; il en est de même de $\cos\frac{x}{m}$. Quant aux autres facteurs, si l'on en prend un quelconque $1 - \frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{n\pi}{m}}$, sa limite sera $1 - \frac{x}{n^2\pi^2}$.

On trouvera donc, en employant les mêmes considérations que pour $\cos x$,

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots,$$

Ainsi $\sin x$ se trouve décomposé en une infinité de facteurs du premier degré en x, dont le premier est x, et les autres sont renfermés dans la formule générale

$$1 \pm \frac{x}{n\pi},$$

n désignant un nombre entier quelconque. En les égalant à zéro, on trouve toutes les racines de l'équation $\sin x = 0$, qui sont représentées par la formule $\pm n\pi$, n désignant un nombre entier quelconque qui peut être zéro.

NOTE

SUR LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE;

PAR M. E. CATALAN.

Le dernier cahier du *Journal de l'École Polytechnique* renferme, entre autres matières, la solution d'un problème que l'on peut énoncer ainsi : *Trouver tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur une sphère donnée.* Cette solution, fondée sur les théories les plus élevées du calcul intégral, m'a semblé d'une complication peu en rapport avec la nature du sujet. On va voir, en effet, que le problème dont il s'agit peut être résolu à l'aide des plus simples notions de Géométrie et d'Algèbre.

1. *Les projections stéréographiques de deux cercles orthogonaux appartenant à une sphère donnée, sont des cercles orthogonaux.* Réciproquement, *à deux cercles orthogonaux tracés sur le plan qui sert de* TABLEAU *correspondent, sur la sphère, deux cercles orthogonaux.*

D'après ces deux lemmes, pour résoudre la question qui nous occupe, il suffit de *déterminer tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur un plan.*

2. Considérons deux séries de cercles tels, que chacun de ceux de la première série coupe orthogonalement tous ceux qui appartiennent à la seconde. Si nous rapportons ces cercles à deux axes rectangulaires quelconques, nous pourrons les représenter par les deux équations

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \tag{1}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2, \tag{2}$$

dans lesquelles a, b sont des fonctions inconnues du *paramètre* r, et α, β des fonctions inconnues du paramètre ρ.

La condition d'*orthogonalité* donne d'abord

$$(x-a)(x-\alpha)+(y-b)(y-\beta)=0;$$

puis, par l'élimination de x et de y,

$$(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2=r^2+\rho^2,$$

ou

$$(3)\qquad (a^2+b^2-r^2)+(\alpha^2+\beta^2-\rho^2)=2(a\alpha+b\beta).$$

5. L'équation (3), dans laquelle r et ρ sont *deux variables indépendantes*, est impossible, à moins que son second membre ne se réduise à la forme $2[f(r)+\varphi(\rho)]$: en effet, elle doit être identique par rapport aux deux variables, et son premier membre est déjà de cette forme.

Cela posé, de

$$(4)\qquad a\alpha+b\beta=f(r)+\varphi(\rho),$$

on conclut, en prenant les dérivées relatives à r,

$$a'\alpha+b'\beta=f'(r),$$

ou

$$(5)\qquad \alpha+\frac{b'}{a'}\beta=\frac{f'(r)}{a'}.$$

Cette nouvelle relation exige, évidemment, que $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{f'(r)}{a'}$ soient des constantes k et η. Ainsi,

$$b'=ka',\quad f'(r)=\eta a';$$

puis, h étant une nouvelle constante,

$$(6)\qquad b=k(a-h);$$

puis encore, par l'équation (5),

$$(7)\qquad \beta=-\frac{1}{k}(\alpha-\eta)\ [*].$$

[*] On aurait pu tirer ces formules de l'équation (4), directement et sans employer la considération de la dérivée ; mais la solution eût été moins claire et peut-être moins rigoureuse.

4. Ces valeurs des ordonnées b et β, substituées dans l'équation (3), donnent, par un calcul facile,

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2\eta(a - h) - l^2,$$
$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2h\alpha + l^2,$$

l^2 désignant une constante.

Par suite, les équations (1) et (2) deviendront

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2\eta(a - h) + l^2 = 0, \tag{8}$$
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2h\alpha - l^2 = 0. \tag{9}$$

5. Pour simplifier ces résultats, observons que, d'après les équations (6) et (7), les centres de nos deux séries de cercles sont situés sur deux droites perpendiculaires entre elles. Si donc nous prenons ces deux lignes pour axes, nous aurons

$$k = 0, \quad h = 0, \quad \eta = 0, \quad \alpha = 0, \quad b = 0,$$

et les équations (8) et (9) deviendront

$$x^2 + y^2 - 2ax + l^2 = 0, \tag{10}$$
$$x^2 + y^2 - 2\beta y - l^2 = 0. \tag{11}$$

6. Ces nouvelles équations représentent tous les cercles cherchés. Ceux de la première série ont leurs centres sur l'axe des x, et les autres ont les leurs sur l'axe des y. Le *système orthogonal* est déterminé par la constante l^2. Si cette constante est positive, ce qu'il est permis de supposer, les cercles représentés par l'équation (11) couperont l'axe des abscisses en deux points *fixes* A, B situés de part et d'autre de l'origine O, à une distance égale à l; et les autres cercles rencontreront orthogonalement le même axe, en deux points *variables* C, D, déterminés par

$$\mathrm{OC} = \beta - \sqrt{\beta^2 - l^2}, \quad \mathrm{OD} = \beta + \sqrt{\beta^2 - l^2}.$$

7. On conclut, de ces dernières valeurs,

$$\mathrm{OC}.\mathrm{OD} = l^2 = \overline{\mathrm{AO}}^2.$$

Cette relation signifie que *la droite* AB *est partagée harmoniquement*

aux points C, D. Conséquemment, *pour obtenir tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur un plan, on prend deux points fixes quelconques* A, B, *par lesquels on fait passer une première série de cercles; on partage la droite* AB, *harmoniquement, aux points variables* C, D; *enfin, sur* CD *comme diamètre, on décrit une circonférence : elle coupe orthogonalement tous les premiers cercles.*

8. Remarque. — *Il n'existe pas, sur un plan, de systèmes de cercles orthogonaux autres que ceux qui résultent de la construction précédente.*

Cette construction est bien connue, puisqu'elle ne diffère pas de celle qui donne la *projection stéréographique sur un horizon* [*]; mais il était intéressant d'examiner si les systèmes qu'elle fournit sont les seuls possibles.

9. Supposons à présent que les cercles AB, CD soient situés dans un plan passant par le centre I d'une sphère quelconque S; appelons V l'extrémité du rayon perpendiculaire à ce plan : V sera le *point de vue;* le plan ABCD sera le *tableau;* et les cercles orthogonaux AB, CD seront les *perspectives,* ou les projections stéréographiques de deux cercles orthogonaux *ab*, *cd* tracés sur la sphère. Cette proposition, que nous avons admise en commençant, se démontre sans difficulté. Il n'est pas aussi aisé de voir comment sont distribuées, sur la sphère, les deux séries de cercles répondant aux deux séries tracées sur le plan ABCDI. Pour résoudre cette partie de la question, je m'appuierai sur la proposition suivante :

10. *Si un faisceau harmonique a son centre* V *sur une circonférence, chacune des cordes ab, cd obtenues en joignant les extrémités des rayons conjugués, passe par le pôle de l'autre corde.*

Pour démontrer que *ab* passe par le point *s*, pôle de *cd*, menons *da*, *db*; nous aurons, par une propriété connue,

$$\frac{\sin cVa}{\sin cVb} = \frac{\sin dVa}{\sin dVb};$$

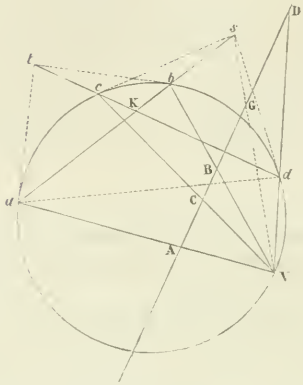
ou, en remplaçant les différents angles par ceux qui leur sont respec-

[*] *Voyez* ma *Cosmographie*.

tivement égaux.

$$\frac{\sin cda}{\sin cdb} = \frac{\sin sda}{\sin sdb}.$$

Fig. 1.



On conclut de là que la corde *ab* est partagée harmoniquement par la corde *cd* et par la tangente *ds*. On prouverait de même que *ab* est partagée harmoniquement par *cd* et par la tangente en *c*, etc.

11. Par le point V et par la droite ABCD considérée ci-dessus, faisons passer un plan : il coupera la sphère S suivant une circonférence *acbd*V, sur laquelle seront situés les points *a*, *b*, *c*, *d* dont A, B, C, D sont les perspectives. Puisque les points A, B sont fixes, il en sera de même pour *a*, *b*; c'est-à-dire que *tous les cercles de la première série passeront par les extrémités de la corde ab*. D'apres un théoreme connu, *le lieu des pôles de ces cercles, relativement à la sphère* S, *est la droite* RÉCIPROQUE *de ab* [*] : sur le plan de la figure, cette droite serait projetée suivant la perpendiculaire élevée au milieu de *ab*. Mais, d'après une propriété de la projection stéréographique démontrée par M. Chasles, chacun de ces pôles a pour perspective le centre du cercle AB correspondant. Donc, *à la droite lieu des centres des cercles* AB *correspond, dans l'espace, une autre droite, laquelle est réciproque de la corde ab*.

12. Soit G le milieu de CD, ou le centre du cercle CD : ce point est

[*] *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, seconde edition, page 282.

la perspective du sommet du cône circonscrit à la sphère S suivant le cercle *cd*. Donc, les tangentes *cs* et *ds* sont deux génératrices de ce cône, lequel a pour sommet *s*. Nous avons vu tout à l'heure que ce point *s* est situé sur la corde *ab*; conséquemment, *le lieu des pôles des cercles appartenant à la seconde série est la droite ab; les plans de ces cercles passent tous par la droite réciproque de ab.*

13. En résumé, *pour obtenir tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur une sphère, on prend deux droites réciproques l, l'; suivant la première droite on fait passer des plans qui donnent lieu, par leurs intersections avec la sphère, à une première série de cercles; on opère de la même manière pour la seconde droite: chacun des cercles de la seconde série coupe orthogonalement tous ceux de la première.* En outre, *le lieu des pôles des premiers cercles, relativement à la sphère, est la seconde droite,* ET VICE VERSA.

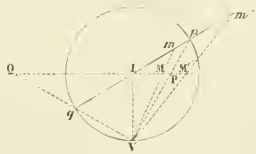
14. Les droites réciproques *l*, *l'* sont perpendiculaires entre elles, et elles ont pour projections stéréographiques les droites rectangulaires O*x*, O*y*, considérées plus haut (6). Par suite, *les projections stéréographiques de deux droites réciproques sont deux droites perpendiculaires entre elles.*

Cette propriété de la projection stéréographique n'avait pas, je crois, été remarquée : elle fait voir que l'angle de deux droites peut rester invariable en perspective, lors même que les côtés de l'angle ne sont pas dans un même plan.

15. Il y a plus : *les projections* M, M' *des points réciproques m, m' par lesquelles passent les droites réciproques l, l' sont elles-mêmes des points réciproques, relativement à un certain cercle.*

En effet, imaginons le grand cercle *q*V*p* passant par le rayon I*mm'* et par le point de vue V, et soit, sur le plan de ce grand cercle.

Fig. 2.



PIQ la trace du tableau. La perspective du grand cercle perpendicu-

laire au plan de la figure, et passant par qIp sera, évidemment, la circonférence décrite sur QP comme diamètre. Or, Vm, Vm', Vq et Vp forment un faisceau harmonique; donc M et M' sont réciproques relativement au cercle QP.

16. Supposons que, les points m, m' étant fixes, les droites l, l' tournent autour du rayon Im : alors les perspectives L, L' de ces deux droites tourneront autour des points M, M', sans cesser d'être perpendiculaires entre elles. Conséquemment, *le lieu du point de rencontre* R *des droites* L, L' *est la circonférence décrite sur* MM' *comme diamètre.*

17. Aux deux points M, M' qui restent fixes quand les droites l, l' éprouvent un mouvement de *rotation*, répondent deux points N, N' qui ne changent pas lorsque ces droites reçoivent un mouvement de *translation*. En effet, par le point de vue V, menons des parallèles à nos deux droites : les points N, N' où ces parallèles percent le tableau, seront les points de *fuite* des perspectives L, L'. Conséquemment, si les droites réciproques l, l' se déplacent, mais sans changer de direction, ces points N, N' seront invariables.

18. On pourrait continuer cette discussion; on verrait, par exemple, que *les cercles décrits sur les droites telles que* MM' *forment, avec les perspectives des grands cercles décrits sur le diamètre* p, q, *un système orthogonal;* mais je ne veux pas épuiser le sujet.

(Mai 1854.)

MÉMOIRE

SUR

L'EMPLOI DES MIRES MÉRIDIENNES DANS LE CALCUL DE LA DÉVIATION AZIMUTALE;

PAR M. ERNEST LIOUVILLE.

(Lu à l'Académie des Sciences le 22 mai 1854.)

1. On sait que deux sortes d'erreurs affectent les temps des passages des astres derrière le réticule des lunettes méridiennes : les unes sont tout à fait indépendantes de la lunette elle-même, les autres sont liées d'une manière intime avec la position de l'instrument.

2. Les erreurs qui dépendent de la position de la lunette, et qui nous occuperont seules aujourd'hui, sont au nombre de trois. Car, pour qu'une lunette tournant autour d'un axe décrive un plan méridien, il faut : 1° que son axe optique soit perpendiculaire à son axe de rotation; 2° que son axe de rotation soit horizontal; 3° que les deux autres conditions étant remplies, le plan décrit par la lunette passe par le pôle, ou, ce qui revient au même, soit le plan où les étoiles qui ne se couchent pas atteignent leur plus haute et leur plus basse culmination.

A ces trois conditions, lorsqu'elles ne sont pas exactement remplies, répondent trois erreurs : 1° l'erreur d'axe optique ou de collimation; 2° l'erreur d'inclinaison; 3° l'erreur de déviation ou d'azimut [*].

[*] Il est bon de préciser ici ce que j'entends par erreur : désignant par T le temps du passage observé d'un astre, par ax, by, cz les erreurs dues à la lunette, provenant de la déviation, de l'inclinaison, et de l'axe optique, par η l'erreur provenant de la pendule, et par t le temps où aurait dû avoir lieu l'observation, nous aurons l'équation

$$t = \mathrm{T} + ax + by + cz - \eta.$$

3. Une lunette amenée par des moyens mécaniques à satisfaire aux trois conditions exigées pour qu'elle décrive un plan méridien ne pouvant que fort difficilement rester dans cette position, on est obligé de déterminer les erreurs qui proviennent d'un changement de position quelconque, et d'en tenir compte dans le calcul des temps des passages observés des astres; on conçoit facilement dès lors de quelle importance il est de connaître parfaitement ces erreurs.

4. Deux d'entre elles, l'erreur d'axe optique et l'erreur d'inclinaison, peuvent se déterminer directement, et sans avoir recours aux observations astronomiques. Le retournement de la lunette sur une mire dont la valeur des parties est connue, donne facilement la première; l'emploi du niveau ou la réflexion des fils du réticule sur la surface horizontale du mercure permettent de déterminer et de corriger la seconde. Mais il n'en est pas de même de l'erreur de déviation azimutale; on est obligé, pour la connaître, d'avoir recours aux observations astronomiques.

5. Les temps des passages à la moyenne des fils du réticule de la lunette méridienne ayant été déterminés pour deux étoiles assez différentes en déclinaison, on corrige ces temps observés des erreurs produites par le défaut de perpendicularité de l'axe optique sur l'axe de rotation de la lunette, et du défaut d'horizontalité de ce dernier; on retranche ensuite la différence de ces temps corrigés de la différence des ascensions droites données pour ces étoiles dans les éphémérides, et l'on divise le tout par le coefficient de déviation correspondant à la deuxième étoile dont on a retranché le coefficient de déviation correspondant à la première. Le résultat ainsi obtenu est l'angle que fait le plan décrit par la lunette avec le plan méridien, ou l'azimut de la lunette exprimé en temps [*].

---

[*] Soient $\frac{1}{15}x$ l'angle de déviation de la lunette exprimé en temps, t et t' les temps sidéraux des passages observés des deux étoiles corrigés des erreurs d'axe optique et d'inclinaison, R et R' les ascensions droites des étoiles employées; on a, si x est assez petit pour qu'on puisse remplacer par les arcs les lignes trigonométriques

6. On voit, par la manière même dont on procède pour rechercher cette déviation, quelles sont les causes qui empêchent de la déterminer très-rigoureusement : le défaut d'exactitude de l'observation elle-même, et l'emprunt que l'on fait aux éphémérides de positions sur lesquelles il règne toujours une petite incertitude. Ces erreurs, si l'on opère avec des étoiles assez distantes du pôle, peuvent égaler et surpasser l'erreur de déviation. Lors même que l'on opère avec la polaire et une étoile équatoriale, une simple erreur d'une seconde sur la différence des temps observés (et l'on ne peut espérer d'arriver facilement à une pareille précision) en fait naître une de 4 centièmes de seconde de temps dans la déviation. Il faudrait donc multiplier les observations des étoiles qui peuvent servir à cette recherche, ce qu'il est souvent difficile, quelquefois impossible de faire. Une des deux causes d'incertitude, celle qui provient de la position attribuée à une étoile dans les éphémérides, disparaît cependant lorsqu'on peut observer la même étoile à ses deux passages au méridien. Mais cette méthode ne peut s'appliquer à des étoiles quelconques que dans les longues nuits d'hiver, et, pendant le reste de l'année, la polaire et les quelques brillantes étoiles qui environnent le pôle permettent seules de l'employer.

7. Pour échapper à cet inconvénient, des astronomes ont imaginé, lorsqu'ils observent la Lune ou les planètes, de les comparer aux étoiles fixes situées à peu près sur le même parallèle : alors l'erreur provenant de la déviation affecte de la même manière et la planète et l'étoile; elle n'empêche donc point de déduire la position de la planète, de celle de l'étoile supposée connue.

Cette méthode, qui peut permettre quelquefois de tirer parti d'observations pour lesquelles le calcul de la déviation manque, doit par-

---

qui leur correspondent,

$$\frac{1}{15}x = \frac{(\mathrm{R}' - \mathrm{R}) - (t' - t)}{\dfrac{\cos h'}{\sin \Delta'} - \dfrac{\cos h}{\sin \Delta}},$$

h, h' désignant les hauteurs méridiennes au-dessus de l'horizon sud, comptées de 0 à 180 degrés, et Δ, Δ' les distances polaires de chacune des étoiles dont on s'est servi.

faitement réussir toutes les fois que les erreurs instrumentales sont très-petites ou que le mouvement de la planète n'est pas trop considérable. Aussi M. Le Verrier, qui, dans son beau travail sur Mercure, l'a employée pour la réduction de deux séries d'excellentes observations de cette planète, faites à l'Observatoire de Paris du 8 mars 1801 au 22 octobre 1828, et du 20 avril 1836 au 18 août 1842, dont la seconde, encore inédite, avait été mise à sa disposition par la libéralité scientifique de M. Arago, n'a procédé de la sorte qu'après s'être assuré que l'erreur de collimation, l'erreur en azimut, et l'erreur du niveau étaient toujours nulles ou fort petites. Mais comment aurait-on pu reconnaître la petitesse de l'erreur azimutale si l'on n'avait eu des observations propres à la déterminer? Ajoutons que le nombre des étoiles fondamentales situées sur le parallèle des planètes est assez petit : pour rester sur ce parallèle on est obligé, la plupart du temps, de se servir d'étoiles moins brillantes et dont la position n'est pas aussi exactement connue; cette ressource manque même totalement pour les planetes dont le passage au méridien a lieu pendant le jour. Il est donc souvent indispensable, dans ce dernier cas, de connaître la déviation.

8. Est-il bien vrai d'ailleurs que cette connaissance soit inutile, même quand on peut observer des étoiles sur le parallèle de la planète? Outre qu'elle permet d'employer à la détermination du lieu de cette planète un plus grand nombre d'étoiles fondamentales et d'étoiles situées dans différentes parties du ciel, et, par suite, d'éliminer plus sûrement les erreurs provenant des positions défectueuses attribuées aux étoiles de comparaison, n'est-elle pas nécessaire à celui qui voudrait avoir d'une manière plus certaine le temps absolu de l'observation? Loin de renoncer à calculer la déviation, cherchons donc, au contraire, à en rendre la détermination à la fois plus exacte et plus facile.

9. Il arrive quelquefois que, favorisé par le temps ou les circonstances, on peut déterminer fort exactement l'azimut d'une lunette méridienne; puis l'on est souvent plusieurs jours, pendant lesquels il est cependant possible de faire des observations importantes, avant de pouvoir arriver à une nouvelle détermination exacte de la déviation azimutale. Comment se comporte la lunette pendant cet intervalle de temps, quelle correction faut-il apporter aux passages observés à

l'aide de l'instrument? Voilà quelle question on est naturellement conduit à se poser.

Lorsque les temps des observations qui servent à calculer la déviation ne sont pas très-rapprochés, on voit facilement, par les résultats auxquels on arrive, que l'on ne doit pas faire simplement varier l'erreur d'azimut proportionnellement au temps; il faut donc chercher un autre mode d'interpolation, et les mires méridiennes vont nous le fournir.

10. L'usage des mires pour amener à peu près les lunettes dans le méridien est fort ancien. L'Observatoire de Paris en avait autrefois deux, dont on peut lire la description dans l'introduction aux volumes publiés, en 1825, en vertu d'un arrêté du Bureau des Longitudes, et qui contiennent les observations astronomiques faites de 1810 à 1825 par MM. Arago, Bouvard, Mathieu, Nicollet et Gambart. L'une de ces mires avait été placée sur la façade méridionale du palais du Luxembourg, en l'année 1800, à une distance de 1 364 mètres environ de la lunette méridienne; l'autre l'avait été en 1806, au midi de l'Observatoire, sur une pyramide élevée dans la plaine de Montrouge, à une distance d'environ 1 840 mètres. Mais la mire du Luxembourg fut détruite lors de l'agrandissement de cet édifice, et, plus tard, celle de Montrouge fut cachée par les constructions élevées par le Génie pour les fortifications de Paris.

Pour remédier à cet état de choses, le Bureau des Longitudes décida, sur la proposition de M. Arago, qu'une mire serait placée sur les terrains mêmes de l'Observatoire, et l'exécution en fut confiée à M. Brunner. Cette mire, établie vers la fin du mois de septembre 1852, étant celle qui a servi aux expériences que je vais rapporter, je dois en donner une description rapide.

11. Elle se compose d'une plaque métallique percée d'un disque à son centre, et placée sur un pilier édifié à l'extrémité de la terrasse de l'Observatoire; ce pilier repose sur les murs mêmes de cette terrasse. Sur un second pilier, situé à 70 mètres environ du premier, et qui s'appuie sur le mur le plus rapproché des cabinets d'observation, est placé un objectif destiné à rendre parallèles les rayons de lumière venant de la mire, de manière que, dans la lunette, l'image puisse se former au foyer astronomique. Cet objectif entre dans un anneau

auquel est attachée une plaque métallique solide fixée sur un cadre scellé au pilier. La plaque peut être rendue mobile au moyen d'une vis latérale qui permet à l'objectif de glisser entre les rainures du cadre; il en est de même de la mire.

Le but principal que M. Arago s'était proposé était de déterminer facilement l'erreur de collimation de la lunette au moyen d'un retournement sur cette mire; il voulait, en outre, qu'elle restât fixe; aussi son diamètre était-il beaucoup plus grand que celui des mires ordinaires; il sous-tendait, vu de la lunette, un angle de 14″,70.

Dans d'autres observatoires, à Poulkova par exemple [*], on se sert, pour déterminer la déviation, d'un système de deux mires, l'une au nord, l'autre au sud de l'instrument, et composées, comme celle de Paris, d'un objectif et d'un disque. Mais le diamètre du disque n'est que de 2″, et la plaque mobile de l'objectif porte une division tracée sur un petit limbe d'argent; sur le cadre se trouve un index. Si le fil du milieu de la lunette n'est pas en coïncidence exacte avec le disque de la mire, l'observateur emploie une verge en bois qui communique avec la vis de l'objectif, et donne à cet objectif le mouvement latéral nécessaire, jusqu'à ce que l'image de la mire tombe exactement sur le fil; alors il lit la position de l'index sur la division tracée sur la plaque de l'objectif. On voit que, dans ce mode d'observation, on déplace à chaque expérience l'objectif de la mire. M. Arago voulait, au contraire, qu'il restât fixe et qu'on mesurât la distance du fil méridien au centre de la mire, à l'aide d'un prisme biréfringent placé entre l'oculaire et l'œil. On avait réuni sur une même pièce en cuivre plusieurs prismes dont les angles de déviation variaient de 30″ en 30″, ce qui permet, avec un grossissement de deux cents fois seulement, de mesurer la distance à $\frac{1}{7}$ de seconde d'arc, précision bien supérieure aux erreurs de pointé.

12. Quoi qu'il en soit de ces deux systèmes, voici comment j'ai opéré avec la mire de M. Arago pour étudier sa marche en contrôlant sans cesse par des observations astronomiques les résultats qu'elle fournit.

A chaque jour favorable pour ces observations astronomiques, j'estime avec soin la distance du fil méridien au centre de la mire en parties

[*] *Voir*, pour plus de détails, la *Description de l'observatoire central de Poulkova*, par M. Struve, tome I, pages 125 et suivantes.

du rayon de cette mire (la valeur du rayon est de $7'',35$ d'arc); j'en retranche ensuite l'effet de l'erreur d'axe optique, erreur déterminée par les procédés ordinaires de retournement. Au moyen de la lecture sur la mire, ainsi corrigée, j'obtiens la valeur de la déviation qui aurait lieu si le centre de la mire coïncidait alors avec le méridien, et je la compare à celle qui résulte des observations astronomiques : la différence entre les deux valeurs ainsi trouvées m'indique à quelle distance du centre de la mire et dans quel sens est le méridien.

Telle est l'opération que j'ai répétée pendant près de cinq mois, du 28 décembre 1852 au 23 mai 1853, et pendant deux mois et demi, du 9 septembre au 25 novembre 1853, toutes les fois que cela m'a été possible. J'ai obtenu ainsi, pour chaque jour où j'ai opéré, l'erreur du centre ou du zéro de la mire.

Les erreurs du zéro étant déterminées de cette manière, j'ai vu qu'elles restaient à peu près constantes pendant un certain intervalle de temps; puis, qu'elles variaient par sauts brusques. Aucun changement considérable ne s'est produit graduellement et par une accumulation de petits changements. Ainsi, pendant quatorze jours, du 16 février au 1er mars, le zéro de la mire était resté presque rigoureusement à l'ouest du méridien de $0^s,09$, tandis que du 1er au 3 mars, en deux jours, il passe plus à l'ouest de $0^s,10$, éprouve ensuite en sens divers (du 3 au 10 et du 10 au 12) deux perturbations encore plus fortes, de $0^s,20$ et $0^s,27$, et ne redevient stable qu'à partir du 12 mars. De même, du 22 au 24 mars, le zéro qui pendant dix jours s'était maintenu à l'ouest du méridien de $0^s,26$ passe brusquement à $0^s,39$. Un changement plus grand encore s'est manifesté du 13 au 18 mai; il atteint 3 dixièmes de seconde, tandis que du 25 avril au 13 mai, la mire s'est conservée presque absolument fixe.

Cette remarque m'a naturellement conduit à grouper les observations consécutives de la mire pour lesquelles j'avais obtenu la même erreur du zéro ou une erreur peu différente, et à en former des séries séparées entre elles par un ou plusieurs points de discontinuité.

Comme j'ai vu, en outre, que dans les séries ainsi formées les différences entre les positions du zéro n'étaient que de l'ordre des erreurs du pointé, et semblaient n'affecter aucune loi de variation, j'ai pris pour erreur uniforme du zéro de la mire, pendant toute la série, la

moyenne des erreurs déterminées dans l'espace de temps qu'elle renferme. Cela m'a permis de faire concourir à la détermination de la position du zéro, non plus seulement les observations astronomiques faites le jour même de la lecture sur la mire, mais toutes celles faites pendant la même série; et c'est de cette position que je conclus une valeur nouvelle de la déviation azimutale, plus exacte, ce me semble, que celle qu'on avait par les seules observations astronomiques du jour. J'espère avoir ainsi atténué beaucoup les erreurs de pointé. Voilà un premier service que la mire peut rendre.

Maintenant, supposons qu'un astre ait été observé à un des jours compris dans l'intervalle d'une de nos *séries régulières,* et que ce jour soit un de ceux où la détermination astronomique de l'azimut s'est trouvée impossible, mais non pas la lecture sur la mire. Que ce jour soit, par exemple, le 29 avril, compris dans la série régulière du 25 avril au 13 mai. L'erreur uniforme du centre de la mire, trouvée comme on l'a dit, est de $0^s,18$ pour cette série. Il faudra donc retrancher $0^s,18$ de la lecture sur la mire déjà corrigée de l'erreur d'axe optique, et l'on aura l'erreur de déviation au jour indiqué.

13. On voit par là comment la mire peut fournir souvent une méthode d'interpolation pour trouver l'azimut dans un intervalle de quelques jours où manquent les déterminations astronomiques; il faut seulement que la comparaison de la mire à des observations antérieures et postérieures fasse connaître sa position, et montre que dans l'intervalle en question il n'y a pas eu de changement brusque. A la rigueur, il suffit de deux comparaisons, l'une au commencement, l'autre à la fin de l'intervalle dont il s'agit. Si la différence des erreurs du centre de la mire à ces deux instants est peu considérable, c'est qu'il n'y a pas eu de discontinuité. Mais on comprend qu'il est préférable de faire intervenir le plus grand nombre de comparaisons possible.

14. En effet, le plus grand défaut de la mire, ce qui empêche de donner aux résultats obtenus toute la précision dont ils sont susceptibles, provient de la difficulté d'en faire une observation parfaitement exacte. La mire est souvent ondulante: le fil auquel on compare le centre de la mire peut souvent, par suite de ces ondulations, surtout pour les observations faites pendant le jour, paraître correspondre à des points distants entre eux de 2 ou 3 centièmes de seconde de temps; il impor-

terait donc d'avoir une autre mire, située à 180 degrés de la première, qui permît de faire des observations correspondantes, ce qui multiplierait les pointés, et, tout en faisant disparaître l'incertitude qui résulte d'une seule observation, donnerait toute la symétrie désirable. L'établissement de cette seconde mire était dans les intentions de M. Arago et du Bureau des Longitudes; mais on voulait que la mire déjà établie fût expérimentée avant de procéder à l'édification de la seconde.

15. Si j'avais eu à ma disposition ces deux mires combinées, j'aurais repris mon travail, l'emploi des deux mires permettant de séparer plus facilement l'erreur d'axe optique de l'erreur de déviation. Mais la mort de M. Arago a empêché d'établir la seconde; d'ailleurs, j'ai dû moi-même, il y a trois mois, quitter l'Observatoire et abandonner la suite de ces recherches. Toutefois, les résultats que j'ai obtenus me paraissent remplir le but que je m'étais proposé, et je les considère comme pouvant servir de base à des travaux que j'aurai l'honneur de présenter ultérieurement à l'Académie.

16. Je termine ce Mémoire en donnant deux tableaux qui contiennent les *séries régulières* manifestées par les comparaisons de la mire aux observations astronomiques que j'ai faites dans l'intervalle du 28 décembre 1852 au 23 mai 1853, et du 9 septembre au 25 novembre 1853. Dans chacune de ces séries (comme il a été dit, n° **12**), la mire varie peu, tandis qu'il y a discontinuité dans le passage de l'une à l'autre. Pour chaque série je donne, en colonnes séparées, la déviation calculée par les observations astronomiques, la lecture correspondante sur la mire, l'erreur d'axe optique, la lecture sur la mire corrigée de l'axe optique, l'erreur du zéro qui résulte de la moyenne de ces lectures corrigées (en prenant cette moyenne, j'ai tenu compte du nombre des couples d'observations inscrit dans une colonne à part), la déviation qui s'en conclut, et, enfin, la différence entre cette valeur de la déviation et celle que les seules observations du jour avaient d'abord fournie. Une des observations du 19 janvier étant notée douteuse dans mes registres, je n'ai pas fait entrer le 19 janvier dans le calcul de la moyenne pour la série où il figure. J'ai négligé aussi le 14 avril dans la série du 7 au 23, parce que la mire n'a pas été observée ce jour-là d'une manière assez convenable.

DATES.	NOMBRE des couples d'observations astronomiques.	DÉVIATION calculée a leur aide.	LECTURE sur la mire.	ERREUR de l'axe optique.	LECTURE corrigée de l'axe optique.	ERREUR du zéro de la mire.	DEVIATION qui s'en conclut.	EXCES de la premiere valeur de la deviation sur la seconde.
		s	s	s	s		s	s
1852. 28 dec.	2	−0,07	−0,20	+0,02	−0,22	−0,18	−0,04	−0,03
1853. 3 janv.	3	+0,01	−0,18	+0,03	−0,21		−0,03	+0,04
8	2	−0,06	−0,16	+0,03	−0,19		−0,01	−0,05
11 janv.	1	−0,12	−0,10	+0,03	−0,13	0,00	−0,13	+0,01
14	1	−0,25	−0,20	+0,04	−0,24		−0,24	+0,01
15	2	−0,15	−0,16	+0,04	−0,20		−0,20	+0,05
18	1	−0,28	−0,16	+0,04	−0,20		−0,20	−0,08
19	1	−0,28:	−0,12	.....	.....		.....	.....
24 janv.	2	−0,10	−0,16	+0,05	−0,21	−0,09	−0,12	+0,02
28	1	−0,11	−0,12	+0,05	−0,17		−0,08	−0,03
6 févr.	1	−0,04	−0,18	+0,06	−0,24	−0,20	−0,04	0,00
9	2	−0,02	−0,16	+0,06	−0,22		−0,02	0,00
16 févr.	3	−0,08	−0,10	+0,07	−0,17	−0,09	−0,08	0,00
19	1	−0,11	−0,13	+0,07	−0,20		−0,11	0,00
25	4	−0,17	−0,20	+0,08	−0,28		−0,19	+0,02
28	1	−0,14	−0,10	+0,08	−0,18		−0,09	−0,05
1 mars.	1	−0,11	−0,12	+0,08	−0,20		−0,11	0,00
12 mars.	1	0,00	−0,25	0,00	−0,25	−0,26	+0,01	−0,01
14	1	+0,03	−0,25	0,00	−0,25		+0,01	+0,02
15	1	+0,01	−0,25	0,00	−0,25		+0,01	0,00
19	1	−0,07	−0,37	0,00	−0,37		−0,11	+0,04
22	1	−0,08	−0,30	0,00	−0,30		−0,04	−0,04
24 mars.	1	−0,06	−0,49	0,00	−0,49	−0,39	−0,10	+0,04
28	1	−0,05	−0,41	0,00	−0,41		−0,02	−0,03
29	1	−0,05	−0,41	0,00	−0,41		−0,02	−0,03
7 avril	1	−0,16	−0,41	0,00	−0,41	−0,31	−0,11	−0,05
14	1	−0,30	−0,48:	..	....		....	..
17	2	−0,08	−0,42	0,00	−0,42		−0,12	+0,04
23	2	−0,09	−0,42	0,00	−0,42		−0,12	+0,03
25 avril.	1	−0,17	−0,40	0,00	−0,40	−0,18	−0,22	+0,05
27	1	−0,25	−0,40	0,00	−0,40		−0,22	−0,03
30	2	−0,24	−0,40	0,00	−0,40		−0,22	−0,02
4 mai.	1	−0,20	−0,37	0,00	−0,37		−0,19	−0,01
6	1	−0,21	−0,40	+0,01	−0,41		−0,23	+0,02
10	1	−0,16	−0,40	+0,01	−0,41		−0,23	+0,07
13	1	−0,27	−0,40	+0,01	−0,41		−0,23	−0,04
18 mai.	1	−0,41	−0,28	+0,01	−0,29	+0,11	−0,38	−0,03
19	1	−0,38	−0,30	+0,01	−0,31		−0,40	+0,02
20	1	−0,38	−0,30	+0,01	−0,31		−0,40	+0,02
24	2	−0,42	−0,30	+0,01	−0,31		−0,40	−0,02

DATES.	NOMBRE des couples d'observations astronomiques.	DÉVIATION calculée a leur aide.	LECTURE sur la mire.	ERREUR de l'axe optique.	LECTURE corrigée de l'axe optique.	ERREUR du zéro de la mire.	DÉVIATION qui s'en conclut.	EXCÈS de la première valeur de la déviation sur la seconde.
		s	s	s	s		s	s
1853. 9 sept.	1	+0,11	−0,24	+0,07	−0,31	−0s,39	+0,08	+0,03
12	3	+0,15	−0,16	+0,07	−0,23		+0,16	−0,01
19	1	+0,16	−0,16	+0,07	−0,23		+0,16	0,00
21	1	+0,16	−0,16	+0,07	−0,23		+0,16	0,00
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	....
8 oct.	1	+0,30	−0,30	+0,08	−0,38	−0s,71	+0,33	−0,03
9	1	+0,37	−0,30	+0,08	−0,38		+0,33	+0,04
13 oct.	1	+0,13	−0,20	+0,09	−0,29	−0s,40	+0,11	+0,02
22	1	+0,12	−0,16	+0,09	−0,25		+0,15	−0,03
24 oct.	1	+0,28	−0,10	+0,09	−0,19	−0s,51	+0,32	−0,04
25	3	+0,32	−0,10	+0,09	−0,19		+0,32	0,00
26	1	+0,30	−0,10	+0,09	−0,19		+0,32	−0,02
27	2	+0,36	−0,08	+0,09	−0,17		+0,34	+0,02
4 nov.	3	+0,18	−0,07	+0,10	−0,17	−0s,36	+0,19	−0,01
5	1	+0,11	−0,12	+0,10	−0,22		+0,14	−0,03
9	2	+0,22	−0,08	+0,10	−0,18		+0,18	+0,04
22 nov.	1	+0,51	−0,37	−0,11	−0,26	−0s,75	+0,49	+0,02
25	1	+0,43	−0,41	−0,11	−0,30		+0,45	−0,02

Les différences marquées dans nos tableaux entre la valeur de la déviation donnée d'abord par les observations astronomiques et celle fournie par la mire, proviennent plutôt du défaut d'exactitude de la première que de la seconde. Je vais, pour le montrer, rapporter les résultats obtenus le 25 février et le 4 novembre 1853 :

25 février 1853.	Déviation.
Polaire passages supérieur et inférieur.....	− 0s,20
λ petite Ourse P. I. et δ Hydre.....	− 0s,08
δ petite Ourse P. I. et 51 Hévelius Céphée....	− 0s,27
ε petite Ourse P. I. et δ Orion.....	− 0s,15
Moyenne.....	− 0s,175

4 novembre 1853.	Déviation.
β petite Ourse P. S. et P. I	+ 0s,17
γ petite Ourse P. S. et P. I.	+ 0s,23
β Andromède et Polaire	+ 0s,13
Moyenne.....	+ 0s,177

Ce sont là sans doute les couples les plus favorables que l'on puisse

imaginer pour le calcul de la déviation ; et pourtant la troisième détermination du 25 février diffère de la moyenne correspondante de pres de 1 dixième de seconde; la deuxième du 4 novembre, de près de 6 centièmes. Nous avons indiqué au n° 6 les causes de ces écarts. Bien entendu, ils sont rarement aussi considérables ; mais on en trouve assez souvent de 4 à 5 centièmes de seconde. Au contraire, les lectures sur la mire ne comportent guere une erreur accidentelle dépassant 3 centièmes de seconde ; et l'erreur deviendrait moindre encore en employant deux mires combinées.

Du 21 septembre au 8 octobre, il y a un vide dans le second tableau. M. Arago est mort le 2 octobre.

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$\frac{d.(x-x^3)\frac{dy}{dx}}{dx} - xy = 0;$$

PAR J. LIOUVILLE.

C'est l'équation à laquelle conduit la fonction elliptique complète de première espèce; et comme cette équation ne change pas quand on y remplace x par $\sqrt{1-x^2}$, on en a de suite deux intégrales particulières, d'où l'on a conclu l'intégrale générale. Ces deux intégrales sont

$$y = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$$

et

$$y = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2+x^2t^2)}}.$$

Elles se présentent sous forme réelle quand x^2 est < 1, comme on le suppose ordinairement. Mais si l'on prenait $x^2 > 1$, la première deviendrait imaginaire. Or j'observe qu'en y séparant la partie réelle de l'imaginaire, on est conduit alors aux deux intégrales que voici :

$$y = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$$

et

$$y = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(x^2t^2-1)}}.$$

Des quatre valeurs particulières de y que je viens d'écrire, la dernière doit être supprimée comme rentrant dans la seconde, à laquelle on la réduit en faisant

$$t = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2(x^2-1)}};$$

mais la troisième donne une intégrale distincte, qui remplacera la première dans la composition de l'intégrale générale pour le cas de $x^2 > 1$: en posant $xt = \theta$, elle prend cette forme simple

$$y = \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)(x^2-\theta^2)}}.$$

Ainsi, A et B désignant deux constantes arbitraires, l'intégrale complète de notre équation différentielle est

$$y = \mathrm{A}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}} + \mathrm{B}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2+x^2t^2)}},$$

pour $x^2 < 1$, et

$$y = \mathrm{A}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(x^2-t^2)}} + \mathrm{B}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2+x^2t^2)}},$$

pour $x^2 > 1$.

DISCUSSION DE DEUX MÉTHODES ARABES POUR DÉTERMINER UNE VALEUR APPROCHÉE DE sin 1°;

PAR M. WOEPCKE.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 13 mars 1854.)

§ I.

Les Tables des fonctions trigonométriques sont, comme on sait, indispensables à l'Astronomie, et, en général, à toutes les branches des Mathématiques appliquées. La connaissance approfondie des fonctions analytiques, à laquelle s'est élevée l'analyse moderne, nous fournit actuellement des moyens nombreux pour calculer ces Tables avec la plus grande facilité et avec une précision poussée aussi loin qu'on veut. Mais à l'époque de la science où l'on commençait à sentir le besoin de ces Tables, ces moyens, beaucoup plus restreints et beaucoup moins élégants, ne conduisaient qu'à une précision comparativement fort limitée. Par conséquent, chaque perfectionnement apporté à la construction de ces Tables par les géomètres d'une époque intermédiaire, soit en augmentant la précision de méthodes déjà connues, soit en en inventant de nouvelles, doit être compté comme un progrès essentiel dans le développement des sciences mathématiques.

Sous ce point de vue, deux méthodes arabes, que je soumettrai plus loin à un examen détaillé, m'ont paru mériter une attention particulière. Ces méthodes ont été distinguées par M. Sédillot dans le *Commentaire* fort étendu de Mériem-al-Tchélébi, dont il a joint divers extraits à la traduction des *Prolégomènes des Tables d'Oloug-Beg* qu'il vient de faire paraître, après en avoir publié précédemment le texte persan [*]. Dans la Lettre adressée à M. de Humboldt, qui sert de préface à cet ouvrage, M. Sédillot s'exprime ainsi au sujet de ces

[*] *Prolégomènes des Tables astronomiques d'Oloug-Beg*. Traduction et Commentaire, par M. SÉDILLOT; Paris, 1853, p. 69-83.

méthodes (page xxxv) : « Mériem, qui nous fournit une analyse très-
» précieuse de la méthode de l'auteur (Oloug-Beg), ajoute, par son
» exposé, une preuve nouvelle à celles que nous avons données du
» développement remarquable de l'Algèbre chez les Arabes. »

Ces méthodes, développées dans le *Commentaire* de Tchélébi, ne sont pas dues à ce géomètre lui-même, mais appartiennent, soit à Oloug-Beg, soit à d'autres géomètres persans, et je renvoie, à ce sujet, aux détails donnés par Tchélébi lui-même [*]. Pour éviter des longueurs, je les appellerai indistinctement *Méthodes de Tchélébi*, c'est-à-dire exposées par ce géomètre. Pareillement, j'appelle ces méthodes *arabes*, parce que l'Astronomie et les Mathématiques chez les Persans font essentiellement partie de ce grand développement des sciences exactes qui prend son origine dans l'empire arabe des khalifes.

L'objet de ces deux méthodes est de déterminer une valeur approchée de sin 1° : car à une époque où l'on ne connaissait pas les séries par lesquelles s'expriment les fonctions trigonométriques, il n'existait d'autre moyen pour obtenir les valeurs des sinus de degré en degré que de les calculer au moyen des lignes dans le cercle dont elles expriment les rapports au rayon. Et l'on sait que ce sont seulement les sinus des multiples de 3° qui peuvent s'exprimer en forme finie par des radicaux du second degré, tandis que la détermination de sin 1°, dont on a besoin pour calculer les sinus des degrés intermédiaires, dépend d'une équation du troisième degré et nécessite, par conséquent, des procédés particuliers.

Les deux méthodes en question conduisent à cette détermination de deux manières différentes. La première est une méthode d'interpolation semblable à la méthode donnée par Ptolémée pour calculer la corde de 1°, mais permettant d'employer un plus grand nombre de valeurs connues de la fonction, tandis que la méthode de Ptolémée n'en admet que deux, lesquelles, multipliées par des coefficients numériques, y forment les deux limites supérieure et inférieure entre lesquelles est comprise la valeur cherchée de la fonction [**]. Je comparerai cette méthode à celle de Ptolémée, j'en démontrerai la supé-

[*] *Voir* l'ouvrage cité, p. 69 et 77.

[**] La méthode arabe, il est vrai, établit aussi deux limites de la valeur cherchée; mais chacune de ces limites dépend, comme on le verra plus tard, de deux valeurs connues de la fonction.

riorité, et j'examinerai ses points de ressemblance avec nos formules d'interpolation modernes.

La seconde méthode aborde directement le problème du troisième degré, établit l'équation, et la résout ensuite numériquement par un procédé qui se ramène, au fond, à un développement en série ou à une application de la méthode des coefficients indéterminés. Cette méthode, outre qu'elle fournit un résultat plus exact encore que la première, m'a paru fort remarquable, tant à cause de l'idée ingénieuse sur laquelle elle est fondée, qu'à cause de différentes particularités qu'elle présente.

Je procède maintenant à l'exposé détaillé des discussions dont je viens de résumer le résultat.

§ II.

Première méthode de Tchélébi pour déterminer la valeur de sin 1° [*].

I. On calcule les quantités suivantes :

Côté du triangle régulier inscrit dans le cercle, double de.	sin 60°
Côté du carré.	sin 45°
Côté de l'hexagone.	sin 30°
Côté de l'octogone.	sin 22° 30′
Côté du décagone.	sin 18°
Côté du pentagone	sin 36°

Démonstration géométrique de quatre formules trigonométriques, savoir :

II. $$(1)\quad \sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin \text{vers}\,\alpha}{2}\cdot r};$$

$$(2)\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,.\cos\alpha.$$

III. $$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

IV. $$\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha-\beta).$$

$\alpha - \beta$, α, $\alpha + \beta$ étant des angles du premier quadrant [**].

---

[*] *Voir* Sédillot, *Tables d'Oloug-Beg*, p. 69-77.

[**] En effet, l'inégalité

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)$$

équivaut à $2\sin\alpha.\cos\beta < 2\sin\alpha$, ou à $\cos\beta < 1$, c'est-à-dire à $\beta > 0$.

V. On connaît les sinus des angles suivants :

$$45'0'', \quad 56'15'', \quad 1^\circ 7' 30'' \text{ [*]},$$

qui sont, et c'est ce qu'il importe de remarquer, des fractions d'un degré rationnelles et équidistantes entre elles, savoir, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{18}{16}$ d'un degré, de sorte qu'en divisant chacun des deux intervalles déterminés par ces trois arcs en trois parties égales, un des points de division sera l'extrémité de l'arc d'un degré.

Or, en vertu de la formule IV, on aura

$$\left[\sin 1^\circ - \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ\right] < \left[\sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{14}{16}\right)^\circ\right]$$
$$< \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{12}{16}\right)^\circ\right],$$

---

[*] Les sinus de ces trois arcs dérivent de ceux déterminés dans le n° I, de la manière suivante :

1°. Le côté de l'hexagone donne $\sin 30^\circ$

$$\text{et} \quad \frac{30^\circ}{32} = \frac{30^\circ}{2^5} = 56'15'';$$

donc, on n'a qu'à employer cinq fois de suite la formule II (1) pour déduire

$$\sin 56'15'' \quad \text{de} \quad \sin 30^\circ;$$

2°. Le côté du décagone donne $\sin 18^\circ$

$$\text{et} \quad \frac{18^\circ}{16} = \frac{18^\circ}{2^4} = 1^\circ 7' 30'';$$

donc, par le même procédé répété quatre fois, on déduit

$$\sin 1^\circ 7' 30'' \quad \text{de} \quad \sin 18^\circ;$$

3°. Connaissant

$$\sin 18^\circ \quad \text{et} \quad \sin 15^\circ \quad \left(\text{puisque} \quad 15^\circ = \frac{30^\circ}{2}\right),$$

on obtient

$$\sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 3^\circ \quad \text{par la formule III};$$

et de là

$$\sin 45' = \sin\left(\frac{3^\circ}{2^7}\right) \quad \text{par la formule II (1)}.$$

donc

$$(1)\qquad \sin 1^\circ < \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{12}{16}\right)^\circ\right] + \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ.$$

De même,

$$\left[\sin 1^\circ - \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ\right] > \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ\right],$$

donc

$$(2)\qquad \sin 1^\circ > \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ\right] + \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ.$$

Des formules (1) et (2) on conclut, comme valeur approchée de $\sin 1^\circ$,

$$\sin 1^\circ = \frac{1}{6}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{12}{16}\right)^\circ\right] + \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ \text{ [*]}.$$

---

[*] Tchélébi ne pose pas cette dernière formule même; il calcule directement les valeurs (1) et (2) dont il prend ensuite la moyenne arithmétique.

L'expression la plus générale de la méthode arabe serait de poser

$$\left[\sin 1^\circ - \sin\left(\frac{m-p}{m}\right)^\circ\right] < \frac{1}{q}\left[\sin\left(\frac{m-p}{m}\right)^\circ - \sin\left(\frac{\overline{m-p}-q}{m}\right)^\circ\right],$$

$$\left[\sin 1^\circ - \sin\left(\frac{m-r}{m}\right)^\circ\right] > \frac{1}{s}\left[\sin\left(\frac{\overline{m-r}+s}{m}\right)^\circ - \sin\left(\frac{m-r}{m}\right)^\circ\right],$$

où

$$s \geqq 2r,$$

$$\sin 1^\circ = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{q+1}{q}\sin\left(\dfrac{m-p}{m}\right)^\circ + \dfrac{s-1}{s}\sin\left(\dfrac{m-r}{m}\right)^\circ \\ -\dfrac{1}{q}\sin\left(\dfrac{\overline{m-p}-q}{m}\right)^\circ + \dfrac{1}{s}\sin\left(\dfrac{\overline{m-r}+s}{m}\right)^\circ \end{array}\right\};$$

en prenant

$$p = r = 1, \quad q = s = 3, \quad m = 16,$$

on a la formule de Tchélébi.

§ III.

Méthode de Ptolémée pour déterminer la valeur de cord. 1°

I. (Almageste, édition de Halma, p. 26-29).

Côté du décagone régulier inscrit dans le cercle	cord. 36°
Côté du pentagone.	cord. 72°
Côté de l'hexagone.	cord. 60°
Côté du carré.	cord. 90°

II. (*Idem.*, p. 31-32.)

$$\text{cord.}\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{2r\cdot\frac{2r-\sqrt{(2r)^2-(\text{cord.}\,\alpha)^2}}{2}}.$$

III. (*Idem*, p. 30-31.)

$$\text{cord.}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{cord.}\,\alpha\,.\,\text{cord.}\,(180^\circ-\beta)-\text{cord.}\,\beta\,.\,\text{cord.}\,(180^\circ-\alpha)}{2r}.$$

Connaissant cord. 72° et cord. 60°, on obtient, au moyen de la relation III,

$$\text{cord.}\,(72^\circ-60^\circ) = \text{cord.}\,12^\circ;$$

et de là, en employant trois et quatre fois de suite la formule II, on tire

$$\text{cord.}\left(\frac{3}{2}\right)^\circ = \text{cord.}\,\frac{12^\circ}{2^3}$$

et

$$\text{cord.}\left(\frac{3}{4}\right)^\circ = \text{cord.}\,\frac{12^\circ}{2^4}.$$

IV. (*Idem*, p. 34-35.)

$$\text{cord.}\,(\alpha+\beta) : \text{cord.}\,\alpha < (\alpha+\beta) : \alpha,$$

$\alpha+\beta$ et α étant des angles plus petits que 180° [*].

---

[*] Cela revient à énoncer pour des angles plus petits que 90°, que

$$\sin(\alpha+\beta) : \sin\alpha < (\alpha+\beta) : \alpha,$$

V. (ALMAGESTE, édition de Halma, p. 35, 36.)

En vertu du principe précédent, on a

$$\text{cord. } 1^\circ < \frac{4}{3} \text{ cord. } \left(\frac{3}{4}\right)^\circ$$

et

$$\text{cord. } 1^\circ > \frac{2}{3} \text{ cord. } \left(\frac{3}{2}\right)^\circ.$$

Pour le degré d'exactitude que Ptolémée voulait obtenir, les valeurs de $\frac{4}{3}$ cord. $\left(\frac{3}{4}\right)^\circ$ et de $\frac{2}{3}$ cord. $\left(\frac{3}{2}\right)^\circ$ deviennent égales. C'est donc leur valeur commune que Ptolémée assigne à la corde de 1°.

Mais, afin de pouvoir exprimer par une formule ce que la méthode de Ptolémée donne naturellement au delà, sans aucune considération nouvelle, je prendrai pour valeur de cord. 1° la moyenne arithmétique des deux autres valeurs qui l'entourent. En d'autres termes, je poserai, comme valeur approchée dans Ptolémée,

$$\text{cord. } 1^\circ = \frac{1}{3}\left[2 \text{ cord. } \left(\frac{3}{4}\right)^\circ + \text{cord. } \left(\frac{3}{2}\right)^\circ\right].$$

§ IV.

Discutons maintenant le degré d'approximation qu'offrent respectivement les deux méthodes dont je viens de présenter l'exposé. Pour

---

ou que

$$\cos\beta + \frac{\sin\beta}{\operatorname{tang}\alpha} < 1 + \frac{\beta}{\alpha};$$

mais on a séparément

$$\cos\beta < 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin\beta}{\operatorname{tang}\alpha} < \frac{\beta}{\alpha},$$

puisque

$$\sin\beta < \beta \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\alpha > \alpha;$$

donc, etc. C. Q. F. D.

donner aux deux relations qu'elles fournissent une forme plus appropriée à cette discussion, écrivons :

1°. La formule de Ptolémée,

$$\text{cord. } 1^\circ = \frac{2}{3}\,\text{cord.}\left(\frac{12}{16}\right)^\circ + \frac{1}{3}\,\text{cord.}\left(\frac{24}{16}\right)^\circ :$$

2°. La formule de Tchélébi,

$$\sin 1^\circ = \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ + \frac{1}{6}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{12}{16}\right)^\circ\right].$$

On sait que si P, Q, R, S, X désignent les valeurs d'une fonction correspondant aux arguments p, q, r, s, x où P, Q, R, S sont connues, la formule d'interpolation de Lagrange donne

$$(A)\quad \begin{cases} X = \dfrac{(x-q)(x-r)(x-s)}{(p-q)(p-r)(p-s)}\,P + \dfrac{(x-p)(x-r)(x-s)}{(q-p)(q-r)(q-s)}\,Q \\ \quad + \dfrac{(x-p)(x-q)(x-s)}{(r-p)(r-q)(r-s)}\,R + \dfrac{(x-p)(x-q)(x-r)}{(s-p)(s-q)(s-r)}\,S, \end{cases}$$

tandis que

$$k = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$$

est le coefficient de l'erreur que comporte cette forme d'interpolation.

Pour deux valeurs connues de la fonction dont les arguments soient $p = \frac{12}{16}$, $q = \frac{24}{16}$, tandis que $x = \frac{16}{16}$, cette formule donne

$$(3)\qquad X = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}Q \ldots k = -\frac{1}{8},$$

et telle est, en effet, la formule de Ptolémée.

Prenant ensuite trois valeurs de la fonction dont les arguments soient $p = \frac{12}{16}$, $q = \frac{15}{16}$, $r = \frac{18}{16}$, tandis que $x = \frac{16}{16}$, la formule de Lagrange donne

$$(4)\qquad X = -\frac{1}{9}P + \frac{8}{9}Q + \frac{2}{9}R \ldots k = -\frac{1}{512}.$$

De la comparaison des valeurs de k il suit que, toutes choses pareilles, et en tant que l'exactitude de l'interpolation dépend du nombre

des valeurs connues de la fonction et de la distance de leurs arguments à celui de la valeur cherchée, l'erreur de la méthode arabe serait *soixante-quatre* fois plus petite que celle de la méthode de Ptolémée.

Mais observons maintenant que la formule (4) ne s'identifie pas avec la formule arabe, celle-ci faisant la valeur de sin 1°,

$$= -\frac{1}{6}P + Q + \frac{1}{6}R.$$

Désignant cette dernière valeur par X_1, on aura

$$X = X_1 + \frac{1}{18}(P + R - 2Q).$$

Rendons-nous compte d'abord de la valeur que prend l'expression $\frac{1}{18}(P + R - 2Q)$ pour les fonctions P, R, Q proposées dans le cas que nous discutons. Nous verrons que cette quantité, à laquelle nous aurons encore à revenir, est extrêmement petite.

En effet, en développant $\sin\left(\frac{12}{16}\right)^\circ$, $\sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ$ et $\sin\left(\frac{18}{16}\right)^\circ$ en série, et formant ensuite l'expression $\frac{1}{18}(P + R - 2Q)$, les termes qui contiennent la première puissance des arguments se détruisent; conséquemment, ce sera la quantité provenant du terme suivant de la série qui indiquera l'ordre de grandeur de l'expression $\frac{1}{18}(P + R - 2Q)$.

Cette quantité est

$$\frac{1}{18}\left[-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{(16.\rho)^3}(18^3 + 12^3 - 2.15^3)\right]$$
$$= -\frac{1}{546,1 \times 188091,\ldots} < \frac{1}{100\ 000.000},$$

abstraction faite du signe, ρ étant l'arc égal au rayon exprimé en degrés, et

$$\rho^3 = 188091,\ldots.$$

Il résulte de là que, pour le cas que nous discutons, la différence entre X et X_1 ne s'élève pas encore à un cent-millionième de l'unité.

§ V.

Comme la forme d'interpolation adoptée par Tchébébi ne s'accorde pas avec la formule de Lagrange, recherchons, avant d'aller plus loin, si parmi les formules d'interpolation modernes, il y en a une qui correspond plus exactement à la formule de Tchébébi. Pour cela, représentons (comme cela est connu) par les notations du tableau ci-après une suite d'arguments à différence constante, les valeurs d'une fonction correspondant à ces arguments, et les différences première, deuxième, etc., de ces valeurs de fonction :

$a-2w$	$f(a-2w)$			
		$f'\left(a-\frac{3}{2}\right)$		
$a-w$	$f(a-w)$		$f''(a-1)$	
		$f'\left(a-\frac{1}{2}\right)$		$f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)$
a	fa		$f''a$	
		$f'\left(a+\frac{1}{2}\right)$		$f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)$
$a+w$	$f(a+w)$		$f''(a+1)$	
		$f'\left(a+\frac{3}{2}\right)$		$f'''\left(a+\frac{3}{2}\right)$
$a+2w$	$f(a+2w)$		$f''(a+2)$	
		$f'\left(a+\frac{5}{2}\right)$		
$a+3w$	$f(a+3w)$			

Employons, en outre, les notations suivantes,

$$f'\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[fa+f(a+w)\right],$$

$$f'a=\frac{1}{2}\left[f'\left(a+\frac{1}{2}\right)+f'\left(a-\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$f''\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f''a+f''(a+1)\right],$$

$$f'''a=\frac{1}{2}\left[f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)+f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)\right],$$

et désignons par $f(a+nw)$ la valeur cherchée de la fonction correspondant à un argument proposé $a+nw$.

Remplaçant donc

$p,\ q,\ r,\ s,\ x$ par $a,\ a+w,\ a+2w,\ a+3w,\ a+nw,$

la formule de Lagrange devient

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} f(a+nw) &= fa + nf'\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} f''(a+1) \\ &+ \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} f'''\left(a+\tfrac{3}{2}\right) + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4} f^{\text{IV}}(a+2), \end{aligned}\right.$$

et le coefficient de l'erreur sera

$$nw.(n-1)w.(n-2)w.(n-3)w,$$

d'où il suit que, selon les différentes places que peut prendre $a+nw$ dans la suite des arguments connus, la formule (B) comportera des erreurs plus ou moins grandes, et qu'il y a lieu à chercher si, pour l'un ou l'autre de ces cas, on peut établir des formules plus exactes. On sait qu'une discussion détaillée prouve que les formules les plus avantageuses sont :

Pour $a+nw$ compris entre a et $a+w$,

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} f(a+nw) &= fa + nf'\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} f''a \\ &+ \frac{\overline{n+1}.n.\overline{n-1}}{1.2.3} f'''\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \ldots, \end{aligned}\right.$$

Pour $a+nw$ compris entre a et $a-w$, n étant négatif,

$$(D)\quad \left\{\begin{aligned} f(a+nw) &= fa + nf'\left(a-\tfrac{1}{2}\right) + \frac{\overline{n+1}.n}{1.2} f''a \\ &+ \frac{\overline{n+1}.n.\overline{n-1}}{1.2.3} f'''\left(a-\tfrac{1}{2}\right) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Pour n très-près de 0,

$$(E)\quad \left\{\begin{aligned} f(a+nw) &= fa + nf'a + \frac{n.n}{1.2} f''a + \frac{\overline{n^2-1}.n}{1.2.3} f'''a \\ &+ \frac{\overline{n^2-1}.n^2}{1.2.3.4} f^{\text{IV}}a + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Pour n très-près de $\frac{1}{2}$,

$$(F)\quad \left\{\begin{aligned} f(a+nw) &= f\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \left(n-\tfrac{1}{2}\right) f'\left(a+\tfrac{1}{2}\right) \\ &+ \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} f''\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{n.\overline{n-\frac{1}{2}}.\overline{n-1}}{1.2.3} f'''\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Nous avons

$$f(a-w) = \sin\left(\frac{12}{16}\right)^{\circ},$$

$$fa = \sin\left(\frac{15}{16}\right)^{\circ},$$

$$f(a+w) = \sin\left(\frac{18}{16}\right)^{\circ},$$

$$n = +\frac{1}{3},$$

et nous pouvons former, au moyen de ces trois valeurs, les quantités

$$f'\left(a-\frac{1}{2}\right), \quad f'\left(a+\frac{1}{2}\right), \quad f''a,$$

$$f\left(a+\frac{1}{2}\right), \qquad f'a.$$

Comme n est positif, on ne choisira pas la formule (D) dans le cas qui nous occupe; et comme nous ne pouvons pas former $f''\left(a+\frac{1}{2}\right)$, la formule (F) doit pareillement être rejetée, parce qu'en l'employant, on ne tirerait pas parti de la valeur de fonction $f(a-w)$.

Nous n'aurons donc à comparer la formule de Tchélébi qu'aux formules (C) et (E). L'une et l'autre de ces formules donnent identiquement

$$\sin\left(\frac{16}{16}\right)^{\circ} = -\frac{1}{9}\sin\left(\frac{12}{16}\right)^{\circ} + \frac{8}{9}\sin\left(\frac{15}{16}\right)^{\circ} + \frac{2}{9}\sin\left(\frac{18}{16}\right)^{\circ},$$

c'est-à-dire la valeur de X tirée déjà ci-dessus, équation (4), de la formule de Lagrange [*]; ainsi, pour le fond, la formule de Tchélébi approcherait également de l'une ou de l'autre de ces formules. Mais, par rapport à la *forme*, il mérite d'être observé que celle de la formule de Tchélébi est précisément celle de la formule (E), attendu

[*] Cela doit être parce que les avantages des formes particulières, c'est-à-dire les différences des valeurs qu'elles fournissent entre elles, ou d'avec celles de la formule générale, sont d'un ordre de petitesse plus élevé que ne l'est celui des quantités qu'on néglige dans le cas actuel.

que l'on a

$$\sin\left(\frac{15}{16}\right)^{\circ} = fa$$

et

$$\frac{1}{6}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^{\circ} - \sin\left(\frac{12}{16}\right)^{\circ}\right] = nf'a,$$

la quantité négligée par Tchélébi étant

$$\frac{1}{18}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^{\circ} - 2\sin\left(\frac{15}{16}\right)^{\circ} + \sin\left(\frac{12}{16}\right)^{\circ}\right] = \frac{n.n}{1.2}.f''a.$$

quantité discutée ci-dessus, § IV, comme étant la différence entre X et X_1.

§ VI.

Enfin, pour déterminer directement le degré d'exactitude respective des formules de Ptolémée et de Tchélébi, développons en série les quantités de l'une et de l'autre formule, en substituant à celle de Ptolémée la suivante :

$$\sin\left(\frac{8}{16}\right)^{\circ} = \frac{2}{3}\cdot\sin\left(\frac{6}{16}\right)^{\circ} + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{12}{16}\right)^{\circ}.$$

Dans l'une et dans l'autre formule c'est la quantité provenant du second terme de la série qui indique l'ordre de l'erreur.

Cette quantité est :

1°. Pour la formule de Ptolémée,

$$\text{erreur de } \sin 30' = -\frac{208}{24576\,\rho^{i}} = -\frac{1}{118,15\times 188091,\ldots},$$

ou

$$< \frac{1}{20\,000.000},$$

abstraction faite du signe; donc,

$$\text{l'erreur de cord. } 1^{\circ} < \frac{1}{10.000\,000},$$

la valeur de Ptolémée étant trop faible.

2°. Pour la formule de Tchélébi.

$$\text{erreur de } \sin 1^\circ = + \frac{37}{24576}\rho^{\text{v}} = + \frac{1}{664,21 \times 188091,\ldots}$$

ou

$$< \frac{1}{100.000.000},$$

la valeur de Tchélébi étant trop forte [*].

Et en comparant directement les coefficients des deux quantites qu'on vient d'obtenir, il résulte

$$\frac{\text{erreur de } \sin 1^\circ \text{ d'après Tchélébi}}{\text{erreur de cord. } 1^\circ \text{ d'après Ptolemee}} = \frac{37}{416} \text{ ou } = \frac{1}{11} \text{ environ.}$$

C'est ce rapport qui est la mesure de la supériorité réelle de la méthode de Tchélébi sur celle de Ptolémée.

---

[*] Tchélebi (*voir* Sédillot, *Oloug-Beg*, p. 76) fait

$$\sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ = 0^p\,58'\,54''\ 7'''\,59^{\text{iv}}\ 1^{\text{v}},$$

$$\sin\left(\frac{12}{16}\right)^\circ = 0^p\,47'\ 7''\,21'''\ 9^{\text{iv}}\,30^{\text{v}},$$

$$\sin\left(\frac{18}{16}\right)^\circ = 1^p\,10'\,40''\,52''\ 34^{\text{iv}}\ 0^{\text{v}},$$

en substituant ces quantités dans notre formule

$$\left[X_1 = Q + \frac{1}{6}(R - P)\right],$$

on obtient

$$\sin 1^\circ = 1^p\,2'\,49''\ 43'''\ 13^{\text{iv}}\,6^{\text{v}},$$

tandis que le calcul de Tchelebi (*Idem*, p. 77) donne

$$1^p\,2'\,49''\,43'''\,13^{\text{iv}}\,5^{\text{v}}\,30^{\text{vi}},$$

valeur *moins forte* de 30^{vi}. Mais cette différence est tout a fait accidentelle, et provient de ce que Tchélébi néglige dans ce calcul les quantites de la sixième sexagesimale. Ainsi, en prenant le tiers de FQ, il néglige 20^{vi}, et, en prenant le tiers de HS, il néglige 40^{vi}. En tenant compte de ces quantités, la demi-difference qui est le resultat final du calcul, sera

$$0\ 0.0.0.22.25.20,$$

et la valeur de sin 1° sera exactement celle que donne notre formule.

J'ai montré ci-dessus, § IV, qu'avec les valeurs connues de la fonction qu'emploie Tchélébi, ce rapport aurait pu être plus petit encore et ne s'élever qu'à $\frac{1}{64}$. La diminution de l'exactitude provient de la quantité négligée, comme nous avons vu, par Tchélébi, savoir

$$X - X_1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{18}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^0 - 2\sin\left(\frac{15}{16}\right)^0 + \sin\left(\frac{12}{16}\right)^0\right],$$

qui est négative et d'environ un cent-millionième. Si on la néglige, l'ordre de l'exactitude retombe au moins à l'ordre de cette quantité même. Et l'ordre d'exactitude de la formule de Ptolémée étant d'environ un dix-millionième, l'exactitude de la formule arabe ne lui sera plus supérieure que de dix fois environ, ainsi que nous l'avons trouvé.

§ VII.

Seconde méthode de Tchélébi [*].

Première partie.

Plaçant sur une circonférence de cercle, bout à bout, trois arcs de longueur égale AB, BC, CD, on aura, dans le quadrilatère ABCD inscrit dans le cercle, en vertu d'un théorème connu de Ptolémée [**],

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

ou

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + AD.AB,$$

donc, en désignant l'arc AB par α,

$$(\text{cord. } 2\alpha)^2 = (\text{cord. } \alpha)^2 + \text{cord. } 3\alpha . \text{cord. } \alpha;$$

mais, en vertu du théorème ci-dessus, § III, n° II, de Ptolémée, on a aussi

$$(\text{cord. } 2\alpha)^2 = (2r)^2 - \left[2r - \frac{(\text{cord. } \alpha)^2}{r}\right]^2 = 4(\text{cord. } \alpha)^2 - \frac{(\text{cord. } \alpha)^4}{r};$$

[*] Sédillot, *Tables d'Oloug-Beg*, p. 77-83.

[**] Almageste, I, 9, édition de Halma, vol. I, p. 29.

donc

$$(\text{cord. } \alpha)^2 + \text{cord. } 3\alpha \,.\, \text{cord. } \alpha = 4(\text{cord } \alpha)^2 - \frac{(\text{cord. } \alpha)^3}{r^2},$$

ou

$$\text{cord. } 3\alpha = 3 \text{ cord. } \alpha - \frac{(\text{cord. } \alpha)^3}{r^2};$$

et, puisque

$$\text{cord. } \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

on aura, en écrivant α' en place de $\frac{\alpha}{2}$,

$$\sin 3\alpha' = 3 \sin \alpha' - 4 \frac{(\sin \alpha')^3}{r^2}.$$

Tel est essentiellement le raisonnement par lequel Tchélébi démontre que

$$\sin 1^\circ = \frac{1}{3} \sin 3^\circ + \frac{4}{3} \frac{(\sin 1^\circ)^3}{r^2}.$$

ou, en prenant $\sin 1^\circ$ pour inconnue,

$$x = \frac{1}{3} \sin 3^\circ + \frac{4}{3r^2} x^3.$$

Comme cette démonstration ne suppose en aucune façon que l'arc AB ait la valeur déterminée de 2° (quoique Tchélébi, ayant en vue son objet particulier, opère dès l'abord sur un arc auquel il assigne la valeur spéciale dont il aura besoin dans la suite), nous sommes en droit de dire que l'auteur arabe établit en cet endroit la relation générale par laquelle la trisection de l'angle se ramène à une équation du troisième degré.

J'ai montré, dans les Additions à mon édition de l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmi*, p. 125, qu'un géomètre arabe, qui florissait au commencement du XIe siècle, Aboûl Djoûd, en résolvant un problème proposé par le célèbre Albîroûnî, avait déjà donné cette relation pour le cas *particulier* de $\alpha' = 10^\circ$, qui se présente dans la construction de l'ennéagone régulier inscrit dans le cercle.

Ainsi, le passage de Tchélébi que nous fait connaître M. Sédillot, et qui traite le cas *général*, est la preuve d'un progrès conti-

nuel des sciences mathématiques en Orient pendant le moyen âge, et il y a lieu de croire que de semblables preuves se multiplieront à mesure qu'on explorera les œuvres, pour la plupart inconnues encore, des géomètres et des astronomes arabes et persans.

§ VIII.

Seconde partie.

Étant proposée l'équation du troisième degré

$$X = \frac{A + X^3}{B} \quad \text{ou} \quad BX - A = X^3,$$

X sera, en vertu de cette relation même, fonction de A, de sorte que, si l'on conçoit A développé suivant les puissances descendantes d'une certaine quantité, X pourra généralement être développé suivant les puissances descendantes de la même quantité. Mais c'est ce qui a lieu dans le cas actuel, le terme connu de l'équation du troisième degré étant exprimé en sexagènes et sexagésimales; et de là résulte le mode suivant de résolution, qui n'est autre chose qu'une application de la méthode des coefficients indéterminés.

Soient

$$X = x_0 + x_1 \frac{1}{m} + x_2 \frac{1}{m^2} + x_3 \frac{1}{m^3} + \ldots,$$

$$A = am + a_0 + a_1 \frac{1}{m} + a_2 \frac{1}{m^2} + a_3 \frac{1}{m^3} + \ldots,$$

$$B = bm;$$

donc

$$\begin{array}{l|l} BX - A = X^3 \\ = (bx_0 - a)m & \\ + bx_1 - a_0 & = x_0^3 \\ + (bx_2 - a_1)\frac{1}{m} & + (3x_0^2 x_1)\frac{1}{m} \\ + (bx_3 - a_2)\frac{1}{m^2} & + (3x_0^2 x_2 + 3x_0 x_1^2)\frac{1}{m^2} \\ + \text{etc.} & + \text{etc.} \end{array}$$

on aura

$$
\text{I)}\quad \left\{
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{a}{b},\\
x_1 &= \frac{1}{b}(x_0^3 + a_0),\\
x_2 &= \frac{1}{b}(3x_0^2 x_1 + a_1),\\
x_3 &= \frac{1}{b}(3x_0^2 x_2 + 3x_0 x_1^2 + a_2),\\
x_4 &= \frac{1}{b}(3x_0^2 x_3 + 6x_0 x_1 x_2 + x_1^3 + a_3),\\
x_5 &= \frac{1}{b}(3x_0^2 x_4 + 6x_0 x_1 x_3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_0 x_2^2 + a_4),\\
x_6 &= \frac{1}{b}(3x_0^2 x_5 + 6x_0 x_1 x_4 + 3x_1^2 x_3 + 6x_0 x_2 x_3 + 3x_1 x_2^2 + a_5),\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

Tandis que b, a, a_0, a_1, a_2, etc. sont des nombres entiers, x_0, x_1, x_2, etc., ne seront généralement pas des nombres entiers, mais seront composés d'une partie entière et d'une partie fractionnaire, soit

$$x_0 = x'_0 + \frac{v'_0}{b}, \quad \text{etc.}$$

Donc, si l'on désire que, dans le développement de X suivant les puissances descendantes de m, les coefficients soient des nombres entiers, on formera les quantités suivantes :

$$
\text{II)}\quad \left\{
\begin{aligned}
x_0 &= x'_0 + \frac{v'_0}{b},\\
x_1 + \frac{mv'_0}{b} &= x'_1 + \frac{v'_1}{b},\\
x_2 + \frac{mv'_1}{b} &= x'_2 + \frac{v'_2}{b},\\
x_3 + \frac{mv'_2}{b} &= x'_3 + \frac{v'_3}{b},\\
x_4 + \frac{mv'_3}{b} &= x'_4 + \frac{v'_4}{b},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}
\right.
$$

et l'on aura rigoureusement

$$X = x'_0 + x'_1 \frac{1}{m} + x'_2 \frac{1}{m^2} + x'_3 \frac{1}{m^3} + x'_4 \frac{1}{m^4} + \ldots [*].$$

§ IX.

L'emploi de ce mode de résolution numérique, dans lequel on substitue à l'équation proposée du troisième degré une infinité d'équations linéaires, a pour condition que le diviseur B soit d'un ordre supérieur à celui de l'inconnue X.

Supposons, en effet, pour fixer les idées, que dans le développement suivant les puissances descendantes de m, le premier terme de X soit multiplié en m^0 [**], de sorte que X et X^3 soient du même ordre. Imaginons que les premiers membres des équations (I) soient placés sur une coulisse verticale. Si l'ordre de B est supérieur de plus d'un degré à celui de X, cela revient à faire monter la coulisse; les équations (I) qu'on obtient donneront encore les x par des relations linéaires. Si, au contraire, l'ordre de B est égal ou inférieur à celui de X, cela revient à faire descendre la coulisse, et alors, ou bien on retombera dans une équation du troisième degré, ou bien les relations qui devraient donner les x, renfermeront des indéterminées.

Quant à la quantité A, il suffit que son ordre ne soit pas supérieur à celui de BX [***], car si A est d'un ordre inférieur quelconque, cela revient seulement à rendre nulles quelques-unes des quantités a, a_0, a_1, etc., ce qui n'empêche pas les équations (I) de donner les x par des relations linéaires.

§ X.

La méthode que je viens d'exposer est au fond celle qui est em-

[*] Cette valeur représente celle des trois racines qui devient nulle pour $A = 0$.

[**] Cette supposition est permise, parce qu'elle revient seulement à choisir convenablement l'unité à laquelle on rapporte les nombres qui expriment A, B et X.

[***] Si, à la manière des Arabes, on considère A, B et X comme des quantités nécessairement positives, cette condition est remplie par cela même qu'on pose l'équation

$$BX - A = X^3.$$

ployée par Tchélébi pour calculer la valeur de sin 1° au moyen de la formule

$$x = \frac{\frac{r^2}{4}\sin 3^\circ + x^3}{\frac{3}{4}r^2},$$

en posant $r = 60$, et en exprimant $\frac{r^2}{4}\sin 3^\circ$ en sexagènes et sexagésimales.

Mais soit que Tchélébi n'ait pas connu la véritable loi de formation des seconds membres des équations (I), soit qu'elle lui ait paru trop compliquée, il substitue à cette manière d'obtenir les coefficients de la série qui exprime l'inconnue, le procédé suivant. Il fait

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{array}{l}
\frac{a}{b} = a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}, \\[2ex]
\frac{m\alpha_0 + (a'_0)^3 + a_0}{b} = a'_1 + \frac{\alpha_1}{b}, \\[2ex]
\frac{m\alpha_1 + m\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3 - (a'_0)^3\right] + a_1}{b} = a'_2 + \frac{\alpha_2}{b}, \\[2ex]
\frac{m\alpha_2 + m^2\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m} + \frac{a'_2}{m^2}\right)^3 - \left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3\right] + a_2}{b} = a'_3 + \frac{\alpha_3}{b}, \\[2ex]
\frac{m\alpha_3 + m^3\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m} + \frac{a'_2}{m^2} + \frac{a'_3}{m^3}\right)^3 - \left(a'_0 + \frac{a'_1}{m} + \frac{a'_2}{m^2}\right)^3\right] + a_3}{b} = a'_4 + \frac{\alpha_4}{b}, \\[2ex]
\text{etc.}.
\end{array}\right.$$

où a'_0, a'_1, etc., désignent chacun la partie entière contenue dans le premier membre des équations respectives; puis il prend

$$\sin 1^\circ = a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + a'_2\frac{1}{m^2} + a'_3\frac{1}{m^3} + a'_4\frac{1}{m^4} + \ldots.$$

§ XI.

Cependant, comme il ne s'agit ici que d'une méthode d'approximation, cette circonstance que le procédé de Tchélébi s'éloigne des for-

mules rigoureuses, ne l'empêche pas d'être admissible, pourvu que le résultat numérique soit le même. Car quelle que soit d'ailleurs la manière dont on forme les premiers membres des équations (II), § VIII, et des équations (III), § X, il importe seulement que la partie entière contenue dans les premiers membres de deux équations correspondantes soit la même, ce qui peut très-bien avoir lieu sans que ces premiers membres soient égaux eux-mêmes. Si, par exemple, dans la deuxième équation (II) et la deuxième équation (III), on obtient $\alpha_1 < \nu'_1$, cela n'empêchera pas qu'on n'ait à l'équation suivante $x'_2 = a'_2$, surtout si la différence entre x_2 et $\dfrac{m\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3 - (a'_0)^3\right] + a_1}{b}$ agit en sens contraire à l'erreur provenant de la différence entre α_1 et ν'_1; et il en sera de même pour les équations suivantes. Or, la compensation que je viens d'indiquer, a réellement lieu dans le cas actuel, ainsi qu'il résulte de la discussion détaillée suivante. On a

1°. $$x'_0 + \frac{\nu'_0}{b} = x_0 = \frac{a}{b} = a'_0 + \frac{\alpha_0}{b};$$

2°. $$x'_1 + \frac{\nu'_1}{b} = \frac{x_0^3 + a_0 + m\alpha_0}{b} = \frac{m\alpha_0 + \left(a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}\right)^3 + a_0}{b}$$

$$= \frac{m\alpha_0 + (a'_0)^3 + a_0 + \left[\left(a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}\right)^3 - (a'_0)^3\right]}{b}$$

$$= a'_1 + \frac{\alpha_1 + \left[\left(a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}\right)^3 - (a'_0)^3\right]}{b};$$

3°. $$x'_2 + \frac{\nu'_2}{b} = \frac{3x_0^2 x_1 + a_1 + m\nu'_1}{b} = \frac{m\nu'_1 + a_1 + \left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^3\right)}{b}$$

$$= \frac{m\alpha_1 + m\left[\left(a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}\right)^3 - (a'_0)^3\right] + a_1 + \left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^3\right)}{b},$$

et, en posant

$$\left[\left(a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}\right)^3 - (a'_0)^3\right] - \left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3 - (a'_0)^3\right] = \varepsilon,$$

où ε est une quantité positive, on aura

$$x'_2 + \frac{v'_2}{b} = \frac{m\alpha_1 + m\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3 - (a'_0)^3\right] + m\varepsilon + a_1 + \left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^5\right)}{b}$$

$$= a'_2 + \frac{\alpha_2 + m\varepsilon + \left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^5\right)}{b};$$

4°. $$x'_3 + \frac{v'_3}{b} = \frac{3x_0^2 x_2 + 3x_0 x_1^2 + a_2 + mv'_2}{b}$$

$$= \frac{mv'_2 + a_2 + \left(\frac{3a_0^2}{b^2}x_0 + \frac{3a_1}{b}x_0^2 + \frac{15a_0}{b^2}x_0^4 + \frac{12}{b^2}x_0^7\right)}{b}$$

$$= \frac{m\alpha_2 + m^2\varepsilon + m\left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^5\right) + a_2 + \left(\frac{3a_0^2}{b^2}x_0 + \frac{3a_1}{b}x_0^2 + \frac{15a_0}{b^2}x_0^4 + \frac{12}{b^2}x_0^7\right)}{b};$$

et, en posant

$$m\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m} + \frac{a'_2}{m^2}\right)^3 - \left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3\right] - \left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^5\right) = \varepsilon',$$

où ε' est une quantité positive, on aura

$$x'_3 + \frac{v'_3}{b} = \frac{m\alpha_2 + m^2\varepsilon + m^2\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m} + \frac{a'_2}{m^2}\right)^3 - \left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3\right] - m\varepsilon' + a_2 + \left(\frac{3a_0^2}{b^2}x_0 + \ldots + \frac{12}{b^2}x_0^7\right)}{b}$$

$$= a'_3 + \frac{\alpha_2 + m^2\varepsilon - m\varepsilon' + \left(\frac{3a_0^2}{b^2}x_0 + \frac{3a_1}{b}x_0^2 + \frac{15a_0}{b^2}x_0^4 + \frac{12}{b^2}x_0^7\right)}{b}.$$

Or, comme Tchélébi pose

$$\frac{r^2}{4}\sin 3^\circ = 47^{\mathrm{r}}\,6^{\mathrm{p}}\,8'\,29''\,53'''\,37^{\mathrm{iv}}\,3^{\mathrm{v}}\,45^{\mathrm{vi}},$$

de sorte que

$$a = 47, \quad a_0 = 6, \quad a_1 = 8, \ldots.$$

on obtient, en faisant le calcul des quantités ε et ε',

$$\varepsilon = \frac{2}{60} + \frac{9}{60^2} + \frac{30}{60^3} + \frac{57}{60^4} + \frac{46}{60^5} + \frac{40}{60^6},$$

$$\varepsilon' = 2 + \frac{7}{60} + \frac{53}{60^2} + \frac{15}{60^3} + \frac{44}{60^4} + \ldots.$$

$$m^2\varepsilon - m\varepsilon' = 60(60\varepsilon - \varepsilon') = 1 + \frac{37}{60} + \frac{42}{60^2} + \frac{2}{60^3} + \ldots,$$

d'où il résulte que l'influence de l'erreur de la troisième opération $\left(\text{savoir } 60^2\varepsilon = 129 + \frac{30}{60} + \ldots\right)$ et l'erreur propre de la quatrième opération [*] $\left(\text{savoir } 60\varepsilon' = 127 + \frac{53}{60} + \ldots\right)$ se détruisent presque complétement, leur différence ne s'élevant pas encore à $\frac{1}{78}$ de chacune de ces deux quantités séparément.

Aussi cette méthode donne-t-elle un résultat plus exact encore que la première (celle dont j'ai donné l'exposé au § II); car en faisant tout ce calcul d'après le procédé de Tchélébi, formules (III), § X, j'obtiens pour cinquième reste $a'_4 = 11$ [**], résultat exact, tandis que la valeur 13 fournie par la première méthode est trop forte.

Je ne pousserai pas plus loin cet examen, parce qu'il nécessiterait pour les termes suivants de la série des formules et des calculs plus compliqués encore que ceux qui précèdent, et je crains déjà d'avoir paru au lecteur donner trop d'étendue à cette discussion. Par cette raison, je supprime aussi quelques autres considérations auxquelles cette dernière méthode de Tchélébi pourrait donner lieu, notamment en ce qui concerne la convergence de la série.

Je dirai seulement, pour me résumer, que le procédé de Tchélébi, abstraction faite même de l'exactitude du résultat obtenu, est surtout intéressant à raison de l'ingénieuse idée sur laquelle il est fondé, savoir, de résoudre numériquement et par un développement en série une équation du troisième degré, et, sous ce point de vue, il me paraît digne, au plus haut degré, de l'attention des historiens des sciences mathématiques. Ainsi que l'a pensé M. Sédillot, cette méthode remarquable nous offre une nouvelle preuve des progrès réels que les sciences mathématiques ont faits chez les Arabes.

---

[*] A la quantité $\left(\frac{3a_0^2}{b^2}x_0 + \ldots + \frac{12}{b^2}x_0^2\right)$ près.

[**] Le manuscrit porte 51 (*noûn-élif*), leçon qui a, avec raison, paru douteuse à M. Sédillot (*Oloug-Beg*, p. 80, 1re ligne du *Commentaire*). La correction consiste simplement à mettre deux points au-dessous de la ligne au lieu d'un point au-dessus (*yâ-élif* au lieu de *noûn élif*).

Note.

Pour qu'on puisse juger de l'exactitude absolue des résultats donnés par les deux méthodes arabes que je viens d'examiner, j'ai calculé les valeurs de sin 1° et de sin 3° jusqu'à la douzième décimale [*], savoir

$$\sin 1^\circ = 0{,}017.452.406.437,$$
$$\sin 3^\circ = 0{,}052.335.956.243;$$

d'ou il suit, en faisant le rayon $= 60^p$,

$$\sin 1^\circ = 1^p\ 2'\ 49''\ 43'''\ 11^{iv}\ 14^v\ 44^{vi},$$

$$\frac{1}{4}\sin 3^\circ = \quad 47'\ \ 6''\ \ 8'''\ 29^{iv}\ 53^v\ 37^{vi}.$$

Tchélébi obtient :

Par la premiere méthode,

$$\sin 1^\circ = 1^p\ 2'\ 49''\ 43'''\ 13^{iv}\ \ 5^v\ 30^{vi};$$

Par la seconde méthode,

$$\sin 1^\circ = 1^p\ 2'\ 49''\ 43'''\ 11^{iv};$$

et il prend

$$\frac{1}{4}\sin 3^\circ = \quad 47'\ \ 6'\ \ 8'''\ 29^{iv}\ 53^v\ 37^{vi}\ 3^{vii}\ 45^{viii}$$

---

[*] En faisant

$$\sin 1^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{180} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{180}\right)^5,$$

et, de même,

$$\sin 3^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{60}\right).$$

MÉMOIRE

SUR

LES FACTEURS IRRÉDUCTIBLES DE L'EXPRESSION $x^n - 1$:

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

On sait que l'expression $x^n - 1$, n désignant un nombre entier quelconque, peut se décomposer en facteurs rationnels dont le nombre est égal à celui des diviseurs de n. En effet, en dénotant par $F_m(x) = 0$ l'équation qui ne contient que toutes les racines primitives de l'équation $x^m = 1$, on aura

$$x^n - 1 = F_d(x) \,.\, F_{d'}(x) \,.\, F_{d''}(x) \ldots,$$

où d, d', d'', etc., désignent tous les divers diviseurs du nombre n. On peut dire que cette manière de décomposer l'expression $x^n - 1$ correspond à la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers; car tous les facteurs $F_d(x)$, $F_{d'}(x)$, etc., sont irréductibles, et c'est cette propriété des fonctions $F_d(x)$, $F_{d'}(x)$, etc., bien importante pour la théorie des nombres, qui sera l'objet du présent Mémoire.

Décomposons le nombre n en ses facteurs premiers, et soit

$$n = p^a \,.\, q^b \,.\, r^c \ldots t^g,$$

p, q, r,..., t désignant des nombres premiers quelconques inégaux; on peut représenter de la manière suivante l'équation $F_n(x) = 0$, qui a pour racines les racines primitives de l'équation $x^n = 1$, savoir:

$$F_n(x) = \frac{(x^n - 1)\left(x^{\frac{n}{pq}} - 1\right)\left(x^{\frac{n}{p.r}} - 1\right)\ldots}{\left(x^{\frac{n}{p}} - 1\right)\left(x^{\frac{n}{q}} - 1\right)\left(x^{\frac{n}{r}} - 1\right)\ldots} = 0.$$

Si l'on effectue la division, $F_n(x)$ se présentera comme fonction rationnelle et entière de x du degré

$$p^{a-1}.(p-1).q^{b-1}.(q-1)\ldots t^{s-1}.(t-1);$$

le coefficient du premier terme sera égal à 1, et tous les autres coefficients seront entiers.

En se proposant de prouver l'irréductibilité de l'équation $F_n(x)=0$, et en essayant de profiter des méthodes par lesquelles on a réussi dans le cas spécial où n est un nombre premier, on trouve que ces méthodes ne peuvent suffire, à moins que le nombre n ne soit une puissance d'un seul nombre premier (*voir* un article de M. Serret, tome XV de ce Recueil, page 296). Car si le nombre n contient des nombres premiers inégaux, la fonction $F_n(x)$ prend un caractère tout à fait différent, et il fallait des modifications essentielles pour adapter à ce cas les méthodes par lesquelles on a démontré l'irréductibilité de l'expression

$$F_p(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1},$$

p étant un nombre premier. On verra, en effet, que l'irréductibilité de $F_n(x)$ revient, au fond, à une propriété de $F_m(x)$, m désignant une des puissances p^a, q^b,..., t^s, propriété qu'on peut énoncer brièvement en disant que : *la fonction* $F_m(x)$ *est irréductible, même en admettant de certains nombres complexes.* C'est cette propriété de l'expression $F_m(x)$ qui fait voir distinctement la nature des difficultés qui s'offrent en passant du cas spécial où n ne contient qu'un seul nombre premier, au cas général où n est un nombre quelconque, et c'est cette même propriété qui sera l'objet d'un théorème auxiliaire que nous allons établir.

§ I.

Théorème. — *En désignant par p un nombre premier et par a un nombre entier quelconque, je dis que l'expression*

$$1 + x^{p^{a-1}} + x^{2p^{a-1}} + \ldots + x^{(p-1)p^{a-1}}$$

ne peut se décomposer en facteurs d'un moindre degré, dont les coefficients soient des fonctions rationnelles d'une racine primitive de l'unité, à moins que l'exposant de cette racine ne soit divisible par p.

Démonstration. — En désignant par $f(x)$ l'expression

$$1 + x^{p^{a-1}} + x^{2p^{a-1}} + \ldots + x^{(p-1)p^{a-1}}$$

et par ω une racine primitive quelconque de l'équation $x^{p^a} = 1$, on a, comme on sait,

$$f(x) = (x - \omega^k)(x - \omega^{k'})(x - \omega^{k''})\ldots,$$

où k, k', k'', etc., sont tous les nombres entiers positifs non divisibles par p au-dessous de p^a. Cela posé, si le théorème énoncé n'avait pas lieu, on aurait une équation

$$(1) \qquad f(x) = \varphi(x) . \psi(x),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ désignant des fonctions entières de x dont les coefficients seraient des fonctions rationnelles (entières ou fractionnaires) d'une racine primitive de l'équation $\rho^{\varpi} = 1$, ϖ étant un nombre entier quelconque non-divisible par p. La fonction $f(x)$ ayant pour coefficient de la plus haute puissance de x l'unité, on peut supposer que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ jouissent de la même propriété. Cela posé, on aura, en vertu de l'équation (1), deux équations de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = (x - \omega^h)(x - \omega^{h'})(x - \omega^{h''})\ldots \\ \psi(x) = (x - \omega^i)(x - \omega^{i'})(x - \omega^{i''})\ldots, \end{cases}$$

où h, h', h'', etc., i, i', i'', etc., sont de certains nombres non divisibles par p. Ensuite, il est clair qu'en faisant $x = 1$ les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ se réduiront à des fonctions rationnelles de la racine ρ. On peut donc poser

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi(1) = \dfrac{A + A_1\rho + A_2\rho^2 + \ldots + A_{r-1}\rho^{r-1}}{M}, \\ \psi(1) = \dfrac{B + B_1\rho + B_2\rho^2 + \ldots + B_{r-1}\rho^{r-1}}{N}, \end{cases}$$

où r désigne le degré de l'équation rationnelle *irréductible*, à laquelle satisfait la racine ρ, et où M, N, A, A_1, A_2,..., A_{r-1}, B, B_1, B_2,..., B_{r-1} désignent des nombres entiers, tels que M n'ait aucun diviseur commun avec *tous* les nombres A, A_1, A_2,..., A_{r-1} et que N n'ait aucun diviseur commun avec *tous* les nombres B, B_1, B_2,..., B_{r-1}.

En observant que $f(1) = p$, on obtient, par l'équation (1),

$$\varphi(1).\psi(1) = p.$$

Donc, en remplaçant $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ par leurs valeurs tirées de l'équation (3) et en posant, pour abréger,

$$A + A_1\rho + A_2\rho^2 + \ldots + A_{r-1}\rho^{r-1} = A(\rho),$$
$$B + B_1\rho + B_2\rho_2 + \ldots + B_{r-1}\rho^{r-1} = B(\rho),$$

on aura

$$(4) \qquad A(\rho).B(\rho) = p.M.N.$$

Or, en faisant $x = 1$ dans l'une des équations (2), on obtient

$$\varphi(1) = (1 - \omega^h)(1 - \omega^{h'})(1 - \omega^{h''})\ldots;$$

cette égalité, élevée à la puissance p^a, peut s'écrire

$$\varphi(1)^{p^a} = p.X(\omega),$$

$X(\omega)$ désignant une fonction entière de ω à coefficients entiers. En effet, en ne développant que le premier facteur $(1 - \omega^h)^{p^a}$ suivant les puissances de ω^h, on voit aisément que le premier et le dernier terme se détruisent, si p est impair, et que la somme de ces deux termes est égale à 2, si p est lui-même égal à 2; tandis que les coefficients de tous les autres termes sont toujours divisibles par p. Donc, en faisant, pour abréger, $p^a = m$, l'équation

$$(5) \quad [Z - p.X(\omega)][Z - p.X(\omega^2)][Z - p.X(\omega^3)]\ldots[Z - p.X(\omega^m)] = 0$$

sera évidemment satisfaite en posant $Z = \varphi(1)^m$. En développant le le premier membre de cette équation suivant les puissances de Z, le coefficient du premier terme sera égal à 1, tandis que les coefficients des autres termes contiendront des fonctions symétriques et entières des quantités $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^m$, c'est-à-dire de toutes les racines de l'équation $x^m = 1$, multipliées par les diverses puissances du nombre p. Donc, comme les dites fonctions symétriques se réduisent à de simples nombres entiers, l'équation (5) prendra la forme

$$Z^m + p.u_1 Z^{m-1} + p^2.u_2 Z^{m-2} + \ldots + p^m.u_m = 0,$$

$u_1, u_2, \ldots, u_m$ désignant des nombres entiers. En substituant dans cette équation la valeur

$$Z = \varphi(1)^m = \frac{A(\rho)^m}{M^m},$$

par laquelle elle est satisfaite, on obtient une égalité de la forme suivante

$$A(\rho)^{m^2} = p.C(\rho),$$

où $C(\rho)$ désigne une fonction entière de ρ à coefficients entiers; et il est évident qu'une équation de la même forme aura lieu pour toute puissance de $A(\rho)$ dont l'exposant est plus grand que m^2. Soit donc k un nombre tel, que l'on ait $p^k > m^2$ et $p^k \equiv 1 \pmod{\varpi}$, ce qui est évidemment possible, ϖ étant premier à p; alors on aura une équation de la forme

$$A(\rho)^{p^k} = p.D(\rho).$$

Or, en développant l'expression du premier membre de cette équation, on obtient

$$A(\rho)^{p^k} = A^{p^k} + A_1^{p^k}.\rho^{p^k} + A_2^{p^k}.\rho^{2p^k} + \ldots + A_{r-1}^{p^k}.\rho^{(r-1)p^k} + p.E(\rho),$$

où $D(\rho)$ et $E(\rho)$ désignent des fonctions entières de ρ à coefficients entiers. Donc, en observant que $p^k \equiv 1 \pmod{\varpi}$, et que, par conséquent, $\rho^{p^k} = \rho$, on aura enfin

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A^{p^k} + A_1^{p^k}.\rho + A_2^{p^k}.\rho^2 + \ldots + A_{r-1}^{p^k}.\rho^{r-1} \\ & \quad = p.D(\rho) - p.E(\rho) = p.G(\rho), \end{aligned} \right.$$

$G(\rho)$ désignant une fonction entière de ρ à coefficients entiers *d'un degré quelconque*. Mais l'équation irréductible du degré r à laquelle satisfait la racine ρ doit être un facteur de l'équation $x^{\varpi} - 1 = 0$; donc, en vertu d'un théorème connu (*voir* Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ*, sect. II, art. 42), le coefficient du premier terme x^r étant égal à 1, tous les autres coefficients sont des nombres entiers. C'est pourquoi toute fonction rationnelle entière de ρ à coefficients entiers peut se réduire à une fonction dont le degré est inférieur à r et dont

les coefficients sont encore des nombres entiers. D'où il suit qu'on peut poser

$$G(\rho) = G + G_1\rho + G_2\rho^2 + \ldots + G_{r-1}\rho^{r-1},$$

$G, G_1, G_2, \ldots, G_{r-1}$ désignant des nombres entiers. On a donc par l'équation (6), en observant que la racine ρ ne peut satisfaire à une équation rationnelle d'un degré inférieur à r, les égalités suivantes :

$$A^{p^k} = p.G, \quad A_1^{p^k} = p.G_1, \quad A_2^{p^k} = p.G_2, \ldots, \quad A_{r-1}^{p^k} = p.G_{r-1}.$$

Il faut donc que les nombres $A, A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$ aient le nombre p comme diviseur commun, et, par suite, que le quotient $\frac{A(\rho)}{p}$ soit une fonction entière de ρ à coefficients entiers.

Par le même procédé, en partant de la seconde des équations (3), on obtiendra un résultat analogue; ainsi l'on trouvera que les nombres $B, B_1, B_2, \ldots, B_{r-1}$ ont le diviseur commun p, et que le quotient $\frac{B(\rho)}{p}$ est, par suite, une fonction entière de ρ à coefficients entiers. Le produit $\frac{A(\rho)}{p} \cdot \frac{B(\rho)}{p}$ sera donc lui-même une fonction entière de ρ à coefficients entiers, et en désignant cette fonction par $H(\rho)$, l'équation (4) pourra s'écrire

$$p.H(\rho) = M.N.$$

Or, en vertu de ce que nous avons exposé plus haut, la fonction $H(\rho)$ peut se réduire à un degré inférieur à r, sans que les coefficients cessent d'être des nombres entiers. On aura donc, en posant

$$H(\rho) = H + H_1\rho + H_2\rho^2 + \ldots + H_{r-1}\rho^{r-1},$$

où $H, H_1, H_2, \ldots, H_{r-1}$ sont des nombres entiers,

$$p.(H + H_1\rho + H_2\rho^2 + \ldots + H_{r-1}\rho^{r-1}) = MN,$$

d'où l'on peut conclure, comme plus haut,

$$H_1 = H_2 = \ldots = H_{r-1} = 0$$

et

$$M.N = p.H.$$

Il faut donc qu'un des nombres M ou N soit divisible par p; mais tous les nombres $A, A_1, \ldots, A_{r-1}, B, B_1, \ldots, B_{r-1}$ sont eux-mêmes divisibles par p: un des nombres M ou N aurait donc le facteur p commun avec les nombres $A, A_1, \ldots, A_{r-1}, B, B_1, \ldots, B_{r-1}$, ce qui est contre l'hypothèse; car nous avons supposé chacune des fractions (3) tellement réduite, que le dénominateur et les nombres entiers contenus comme coefficients dans le numérateur soient dégagés de tout diviseur commun.

§ II.

Maintenant, pour démontrer l'irréductibilité de l'équation qui ne contient que les racines primitives de l'équation $x^n = 1$, n étant un nombre entier quelconque, conservons les notations employées plus plus haut, et soit

$$n = p^a \cdot q^b \cdot r^c \ldots t^g.$$

Puis, en désignant par ϖ le nombre $q^b \cdot r^c \ldots t^g$, supposons que l'irréductibilité de l'équation qui ne contient que les racines primitives de l'équation $x^\varpi = 1$ soit démontrée. Enfin, désignons par $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\mu-1}$ toutes les racines primitives de l'équation $x^{p^a} = 1$, et par $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{r-1}$ celles de l'équation $x^\varpi = 1$. Cela posé, l'équation dont nous allons démontrer l'irréductibilité peut s'écrire de la manière suivante

$$(1)\quad \Pi(x - \rho.\omega_k).\Pi(x - \rho_1.\omega_k).\Pi(x - \rho_2.\omega_k)\ldots\Pi(x - \rho.\omega_k) = 0,$$

où chacun des signes Π s'étend à tous les indices de $k = 0$ jusqu'à $k = \mu - 1$. En observant que le produit $\Pi(x - \omega_k)$ est égal à

$$1 + x^{p^{a-1}} + x^{2p^{a-1}} + \ldots + x^{(p-1)p^{a-1}},$$

et, en désignant comme plus haut cette expression par $f(x)$, l'équation (1) prendra la forme

$$f\left(\frac{x}{\rho}\right) \cdot f\left(\frac{x}{\rho_1}\right) \cdot f\left(\frac{x}{\rho_2}\right) \cdots f\left(\frac{x}{\rho_{r-1}}\right) = 0.$$

Le degré de cette équation est égal à $\mu . r$, et pour en démontrer l'ir-

réductibilité il suffit de prouver que tout facteur rationnel de cette équation devrait être du même degré. Soit donc $\varphi(x)$ un facteur rationnel quelconque de l'équation précédente; on peut évidemment supposer que ce facteur s'annule pour $x = \rho\omega$; alors les équations

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{x}{\rho}\right) = 0$$

auront la racine commune $x = \rho\omega$; donc, en cherchant le plus grand commun diviseur des fonctions $\varphi(x)$ et $f\left(\frac{x}{\rho}\right)$, on trouvera une fonction d'un degré $\geqq 1$ dont les coefficients ne sauraient contenir que l'irrationnelle ρ. Si l'on désigne cette fonction par $\varphi(\rho, x)$, on aura une équation de la forme suivante :

$$f\left(\frac{x}{\rho}\right) = \varphi(\rho, x).\psi(\rho, x);$$

ou, en faisant $x = \rho Z$,

$$f(Z) = \varphi(\rho, \rho Z).\psi(\rho, \rho Z).$$

Mais, en vertu du paragraphe précédent, cette équation ne peut subsister, à moins que le degré de $\varphi(\rho, \rho Z)$ par rapport à Z ne soit égal à celui de $f(Z)$; donc le plus grand commun diviseur des fonctions $\varphi(x)$ et $f\left(\frac{x}{\rho}\right)$ doit être la fonction $f\left(\frac{x}{\rho}\right)$ elle-même, et l'on aura, par suite, une équation telle que

$$(2) \qquad \varphi(x) = f\left(\frac{x}{\rho}\right) \cdot \psi(\rho, x),$$

où $\psi(\rho, x)$ désigne une fonction entière de x, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ρ. Comme nous avons supposé l'irréductibilité de l'équation dont les racines sont $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{r-1}$, on peut évidemment changer dans l'équation (2) successivement ρ en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{r-1}$; en d'autres termes, la fonction $\varphi(x)$ n'est pas seulement divisible par $f\left(\frac{x}{\rho}\right)$, mais aussi par $f\left(\frac{x}{\rho_1}\right), f\left(\frac{x}{\rho_2}\right), \ldots, f\left(\frac{x}{\rho_{r-1}}\right)$. Il n'y a pas de facteur commun à deux de ces fonctions, car le produit de toutes ces fonctions étant diviseur de l'expression $x^n - 1$,

l'équation $x^n = 1$ aurait des racines égales, ce qui n'a pas lieu. Par conséquent, la fonction $\varphi(x)$ doit être divisible par le produit

$$f\left(\frac{x}{\rho}\right) \cdot f\left(\frac{x}{\rho_1}\right) \cdot f\left(\frac{x}{\rho_2}\right) \cdots f\left(\frac{x}{\rho_{r-1}}\right)$$

qui est du degré $\mu . r$; elle ne saurait donc être d'un degré inférieur à $\mu . r$; ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration qui précède repose sur l'hypothèse de l'irréductibilité de l'équation qui contient les racines primitives de l'équation $x^{\varpi} = 1$; donc, en conservant les notations employées plus haut, l'irréductibilité de $F_n(x)$ dépend de celle de $F_{\varpi}(x)$. Par le même procédé, on voit que l'irréductibilité de $F_{\varpi}(x)$ dépend de celle de $F_{\varpi'}(x)$, où $\varpi' = r^c . s^d \ldots t^g$; et en continuant ainsi, l'on voit que, pour compléter la démonstration qui est l'objet de ce paragraphe, il ne s'agit que de prouver l'irréductibilité de $F_{\tau}(x)$ où $\tau = t^g$. Or c'est ce qui a été fait dans le paragraphe précédent, comme on peut s'en assurer en y supposant $p^a = t^g$, $\varpi = 1$, et, par suite, $\rho = 1$.

§ III.

La méthode que je viens d'exposer suffit pour démontrer le théorème plus général que voici :

Théorème. — *En désignant par n un nombre entier quelconque et par α une racine d'une équation irréductible à coefficients entiers dont le premier soit égal à 1; en supposant, enfin, que le déterminant de cette équation soit premier à n; je dis que l'équation qui ne contient que les racines primitives de l'équation $x^n - 1$ reste irréductible, même en adjoignant la quantité α; c'est-à-dire, elle ne peut se décomposer en facteurs dont le degré soit inférieur à celui de l'équation et dont les coefficients soient des fonctions rationnelles de la quantité α.*

En effet, en conservant toujours les notations employées précédemment et en supposant que l'équation qui ne contient que les racines primitives de l'équation $\rho^{\varpi} = 1$ reste irréductible en adjoignant la

quantité α, on peut se servir de la méthode exposée pour démontrer le théorème énoncé, si l'on veut prouver que :

L'expression $1 + x^{p^{a-1}} + x^{2p^{a-1}} + \ldots + x^{(k-1)p^{a-1}}$ *n'est pas décomposable en facteurs d'un moindre degré dont les coefficients soient des fonctions rationnelles des deux quantités* ρ *et* α.

C'est donc à l'aide de ce second théorème qu'on pourra employer les conclusions du paragraphe précédent pour ramener finalement le théorème énoncé plus haut à un cas spécial du même théorème, savoir à celui où n est une puissance d'un nombre premier. Or il est visible que pour une telle valeur de n le premier théorème est en même temps un cas spécial du second théorème, savoir en y faisant $\varpi = 1$, et, par suite, $\rho = 1$. Il ne s'agit donc que de prouver généralement ce second théorème, en supposant que l'équation $F_\varpi(x) = 0$ reste irréductible en adjoignant la quantité α. Ce qu'on peut faire comme il suit.

Supposons que le théorème en question n'ait pas lieu et conservons les notations employées dans le § I. Alors on aura, comme plus haut, les équations

$$(1) \qquad f(x) = \varphi(x).\psi(x),$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = (x - \omega^h)(x - \omega^{h'})(x - \omega^{h''})\ldots, \\ \psi(x) = (x - \omega^i)(x - \omega^{i'})(x - \omega^{i''})\ldots, \end{cases}$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ désignent des fonctions entières de x dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des deux quantités α et ρ. Donc, en faisant $x = 1$, les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont réductibles à la forme suivante

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi(1) = \dfrac{A(\alpha) + A_1(\alpha).\rho + A_2(\alpha).\rho^2 + \ldots + A_{r-1}(\alpha).\rho^{r-1}}{M}, \\ \psi(1) = \dfrac{B(\alpha) + B_1(\alpha).\rho + B_2(\alpha).\rho^2 + \ldots + B_{r-1}(\alpha).\rho^{r-1}}{N}, \end{cases}$$

où M et N désignent des nombres entiers, tandis que $A(\alpha)$, $A_1(\alpha)$, $A_2(\alpha)$,..., A_{r-1}, $B(\alpha)$, $B_1(\alpha)$, $B_2(\alpha)$,..., $B_{r-1}(\alpha)$ désignent des fonctions entières de α à coefficients entiers d'un degré inférieur à celui de l'équation irréductible, à laquelle satisfait la racine α. La lettre r dé-

signe le degré de l'équation irréductible $F_\varpi(x) = 0$. En outre, on peut supposer que chacune des deux fractions (3) soit tellement réduite, que le dénominateur n'ait aucun diviseur qui soit en même temps un facteur commun de tous les nombres entiers contenus comme coefficients dans le numérateur.

Or, en dénotant, pour abréger, par $A(\alpha, \rho)$ et $B(\alpha, \rho)$ respectivement les numérateurs des deux fractions (3), on aura, comme plus haut,

$$(4) \qquad A(\alpha, \rho) . B(\alpha, \rho) = p . M . N,$$

et, en suivant tout à fait la marche expliquée dans le § I, on arrive à l'équation correspondante à celle du § I, (6),

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &A(\alpha)^{p^k} + A_1(\alpha)^{p^k} . \rho + A_2(\alpha)^{p^k} . \rho^2 + \ldots \\ &\qquad + A_{r-1}(\alpha)^{p^k} . \rho^{r-1} = p . G(\alpha, \rho), \end{aligned} \right.$$

$G(\alpha, \rho)$ désignant une fonction rationnelle entière de α et ρ à coefficients entiers.

En vertu de ce que nous avons dit plus haut on sait que l'équation irréductible $F_\varpi(x) = 0$, à laquelle satisfait la racine ρ, jouit de la propriété d'avoir pour coefficients des nombres entiers et celui du premier terme égal à 1. Donc le degré de $F_\varpi(x)$ étant égal à r, la fonction $G(\alpha, \rho)$, quel que soit son degré par rapport à ρ, peut se réduire à la forme

$$G(\alpha, \rho) = G(\alpha) + G_1(\alpha) . \rho + G_2(\alpha) . \rho^2 + \ldots + G_{r-1}(\alpha) . \rho^{r-1},$$

$G(\alpha), G_1(\alpha), G_2(\alpha), \ldots, G_{r-1}(\alpha)$ désignant des fonctions entières de α à coefficients entiers. Donc l'équation (5) peut s'écrire

$$\begin{aligned} &A(\alpha)^{p^k} + A_1(\alpha)^{p^k} . \rho + A_2(\alpha)^{p^k} . \rho^2 + \ldots + A_{r-1}(\alpha)^{p^k} . \rho^{r-1} \\ &+ p . G(\alpha) + p . G_1(\alpha) . \rho + p . G_2(\alpha) . \rho^2 + \ldots + p . G_{r-1}(\alpha) . \rho^{r-1}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne les équations

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &A(\alpha)^{p^k} = p . G(\alpha), \\ &A_1(\alpha)^{p^k} = p . G_1(\alpha), \\ &A_2(\alpha)^{p^k} = p . G_2(\alpha), \ldots \\ &A_{r-1}(\alpha)^{p^k} = p . G_{r-1}(\alpha). \end{aligned} \right.$$

Car nous avons supposé que l'équation $F_\varpi(x) = 0$, à laquelle satisfait la racine ρ, reste irréductible en adjoignant la quantité α; la racine ρ ne peut donc satisfaire à une équation d'un degré inférieur à celui de $F_\varpi(x)$ dont les coefficients soient des fonctions rationnelles de α.

Désignons maintenant par $\varphi(x) = 0$ l'équation irréductible à laquelle satisfait la racine α, et par $\beta, \gamma, \ldots, \theta$ ses autres racines. Puis considérons une quelconque des égalités (6), par exemple la première, et posons, en dénotant par λ le degré de $\varphi(x)$,

$$A(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + l\alpha^{\lambda-1},$$

$a, b, c, \ldots, l$ désignant des nombres entiers. Alors on a, par une formule connue,

$$(7) \qquad A(Z) = \frac{A(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \cdot \frac{\varphi(Z)}{Z-\alpha} + \frac{A(\beta)}{\varphi'(\beta)} \cdot \frac{\varphi(Z)}{Z-\beta} + \ldots + \frac{A(\theta)}{\varphi'(\theta)} \cdot \frac{\varphi(Z)}{Z-\theta},$$

où $\varphi'(Z)$ est la fonction dérivée de $\varphi(Z)$. Désignons par Δ le déterminant de l'équation $\varphi(Z) = 0$, ainsi qu'on a

$$\Delta = \varphi'(\alpha) \cdot \varphi'(\beta) \cdot \varphi'(\gamma) \ldots \varphi'(\theta),$$

et faisons

$$\frac{\Delta}{\varphi'(\alpha)} \cdot \frac{\varphi'(Z)}{Z-\alpha} = \psi(\alpha, Z),$$

ou $\psi(\alpha, Z)$ est évidemment une fonction rationnelle entière de α et Z à coefficients entiers. Cela posé, l'équation (7) peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\Delta . a + \Delta . bZ + \Delta . cZ^2 + \ldots + \Delta . lZ^{\lambda-1} \\ &= A(\alpha) . \psi(\alpha, Z) + A(\beta) . \psi(\beta, Z) + \ldots + A(\theta) . \psi(\theta, Z). \end{aligned}$$

En comparant les coefficients des diverses puissances de la variable Z, on obtient, pour chacun des coefficients $a, b, c, \ldots, l$, par exemple pour le coefficient h, une équation de la forme

$$\Delta . h = A(\alpha) . V(\alpha) + A(\beta) . V(\beta) + \ldots + A(\theta) . V(\theta),$$

$V(\alpha)$ désignant une fonction entière de α à coefficients entiers. En élevant cette égalité à la puissance p^k et en réunissant ceux des termes du second membre, dont les coefficients sont divisibles par p, il ré-

sulte une équation de la forme suivante

$$(8)\quad \begin{cases} \Delta^{p^k}.h^{p^k} = A(\alpha)^{p^k}.V(\alpha)^{p^k} + A(\beta)^{p^k}.V(\beta)^{p^k} + \ldots \\ \qquad + A(\theta)^{p^k}.V(\theta)^{p^k} + p.W(\alpha, \beta, \ldots, \theta). \end{cases}$$

où $W(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ désigne une fonction rationnelle entière des racines $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ à coefficients entiers. Or il est visible que cette fonction est symétrique; elle se réduit donc à un simple nombre entier. Désignons ce nombre par P et observons que $\varphi(x) = 0$ étant irréductible, l'équation (6)

$$A(\alpha)^{p^k} = p.G(\alpha)$$

entraîne les équations

$$A(\beta)^{p^k} = p.G(\beta), \quad A(\gamma)^{p^k} = p.G(\gamma), \ldots, \quad A(\theta)^{p^k} = p.G(\theta).$$

Donc, en faisant usage de ces égalités, l'équation (8) se change en celle-ci :

$$(9)\quad \Delta^{p^k}.h^{p^k} = p.\left[\begin{array}{l} G(\alpha).V(\alpha)^{p^k} + G(\beta).V(\beta)^{p^k} + \ldots \\ \qquad + G(\theta).V(\theta)^{p^k} \end{array}\right] + p.P.$$

L'expression contenue entre les parenthèses est une fonction entière symétrique des racines $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ et à coefficients entiers; elle se réduit donc à un simple nombre entier; car dans l'équation $\varphi(x) = 0$ (qui a pour racines $\alpha, \beta, \ldots, \theta$), tous les coefficients sont supposés être des nombres entiers et celui du premier terme égal à 1. Par suite, l'équation (9) entraîne la congruence

$$\Delta^{p^k}.h^{p^k} \equiv 0 \pmod{p},$$

et, enfin, Δ étant supposé premier au nombre n qui est divisible par p,

$$h \equiv 0 \pmod{p},$$

c'est-à-dire : *Il faut que tous les coefficients de* $A(\alpha)$ *soient divisibles par* p".

On peut conclure de la même manière que tous les coefficients contenus dans $A_1(\alpha), A_2(\alpha), \ldots, A_{r-1}(\alpha)$, de même que les coefficients contenus dans $B(\alpha), B_1(\alpha), B_2(\alpha), \ldots, B_{r-1}(\alpha)$ doivent être divisibles par p. Les quotients $\frac{A(\alpha, \rho)}{p}$ et $\frac{B(\alpha, \rho)}{p}$ seront, par suite, des fonctions

entières de α et ρ à coefficients entiers. Donc, en posant

$$\frac{A(\alpha, \rho)}{p} \cdot \frac{B(\alpha, \rho)}{p} = H(\alpha, \rho),$$

l'expression $H(\alpha, \rho)$ sera elle-même une fonction entière de α et ρ à coefficients entiers; et, à l'aide de cette égalité, l'équation (4) peut s'écrire

$$p . H(\alpha, \rho) = M . N.$$

Or, en vertu de ce que nous avons dit plus haut, la fonction $H(\alpha, \rho)$ est réductible à la forme

$$H(\alpha, \rho) = H(\alpha) + H_1(\alpha) . \rho + H_2(\alpha) . \rho^2 + \ldots + H_{r-1}(\alpha) . \rho^{r-1}.$$

$H(\alpha)$, $H_1(\alpha)$, $H_2(\alpha)$,..., $H_{r-1}(\alpha)$ désignant des fonctions entieres de α et ρ à coefficients entiers. On a donc

$$\begin{aligned} p . H(\alpha) + p . H_1(\alpha) . \rho + p . H_2(\alpha) . \rho^2 + \ldots \\ + p . H_{r-1}(\alpha) . \rho^{r-1} = M . N; \end{aligned}$$

d'où il suit, en ayant égard à ce que nous avons supposé, que l'équation irréductible du degré r, dont ρ est une racine, reste irréductible en adjoignant la quantité α,

$$(10) \qquad p . H(\alpha) = M . N.$$

Rappelons encore que, dans l'équation irréductible à laquelle satisfait la racine α, tous les coefficients sont supposés être des nombres entiers et celui du premier terme égal à 1. Donc, en dénotant comme plus haut par λ le degré de cette équation, l'expression $H(\alpha)$ est réductible à la forme

$$H(\alpha) = h + h_1 \alpha + h_2 \alpha^2 + \ldots + h_{\lambda-1} \alpha^{\lambda-1},$$

h, h_1, h_2,..., $h_{\lambda-1}$ désignant des nombres entiers, en substituant cette valeur de $H(\alpha)$ dans l'équation (10) et en observant que la racine α ne peut satisfaire à une équation rationnelle d'un degré inférieur à λ, on arrive à l'égalité suivante

$$p . h = M . N$$

Il faut donc qu'un des nombres M ou N soit divisible par p; mais

nous avons prouvé que tous les nombres contenus comme coefficients dans $A(\alpha, \rho)$ et $B(\alpha, \rho)$ sont divisibles par p; un des nombres M ou N aurait donc le facteur p commun avec tous les coefficients de $A(\alpha, \rho)$ et $B(\alpha, \rho)$, ce qui est contre l'hypothèse: car nous avons supposé chacune des fractions (3) tellement réduite, que le dénominateur et les nombres entiers contenus comme coefficients dans le numérateur soient débarrassés de tout diviseur commun.

§ IV.

Nous avons assujetti dans le paragraphe précédent la quantité α à la condition d'être la racine d'une équation irréductible dont le déterminant soit premier au nombre n. Cependant on peut encore simplifier cette condition en supprimant le mot *irréductible*. Car nous allons voir que l'équation *irréductible* $\varphi(x) = 0$, dont α est une racine, remplit la condition proposée, si le déterminant d'une équation *quelconque* $F(x) = 0$ à laquelle satisfait la racine α est premier à n.

En effet, soit

$$F(x) = \varphi(x) . \psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant [de même que $F(x)$ et $\varphi(x)$] une fonction entière de x à coefficients entiers, dont le premier soit égal à 1. Puis dénotons, comme plus haut, par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta$ toutes les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, et par $a, b, c, \ldots, k$ celles de l'équation $\psi(x) = 0$. Alors, en désignant par D, Δ, Δ_1 respectivement les déterminants des équations $F(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, et, en employant les notations ordinaires des dérivées de $F(x)$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, on aura l'égalité

$$(1) \qquad D = F'(\alpha) . F'(\beta) \ldots F'(\theta) . F'(a) . F'(b) \ldots F'(k).$$

Remplaçons les facteurs du second membre par les valeurs tirées de l'équation

$$F'(x) = \varphi'(x) . \psi(x) + \psi'(x) . \varphi(x),$$

et observons que

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = \ldots = \varphi(\theta) = 0,$$

de même que

$$\psi(a) = \psi(b) = \ldots = \psi(k) = 0.$$

Alors l'égalité (1) se change en celle-ci :

$$D = \varphi'(\alpha).\psi(\alpha).\varphi'(\beta).\psi(\beta)\ldots$$
$$\times \varphi'(\theta).\psi(\theta).\psi'(a).\varphi(a).\psi'(b).\varphi(b)\ldots\psi'(k).\varphi(k),$$

équation qui peut s'écrire comme il suit :

$$D = \Delta.\Delta_1.\psi(\alpha).\psi(\beta)\ldots\psi(\theta).\varphi(a).\varphi(b)\ldots\varphi(k).$$

Les produits dans le second membre de cette équation se réduisent évidemment à de simples nombres entiers, d'où il suit que

$$D \text{ divisible par } \Delta.\Delta_1.$$

Donc si D est premier à un nombre quelconque n, le déterminant Δ jouit de la même propriété; ce qu'il fallait démontrer.

D'après ce que nous venons d'exposer, on peut énoncer le théorème général du paragraphe précédent de la manière suivante :

Tous les facteurs irréductibles de l'expression $x^n - 1$ restent irréductibles même si l'on adjoint une quantité α qui satisfait à une équation à coefficients entiers dont le premier est l'unité, pourvu que le déterminant de cette équation soit un nombre premier à n.

Pour donner une seule application de ce théorème, supposons que α soit une racine primitive de l'équation $x^m = 1$. Donc, le déterminant de cette équation étant égal à m^m, les conditions du théorème seront remplies si l'on suppose que m soit premier à n. D'où l'on voit que *tous les facteurs irréductibles de l'expression $x^n - 1$ restent irréductibles en adjoignant une racine primitive de l'unité dont l'exposant est premier à n.* Or il est visible que celui des facteurs de la fonction $x^n - 1$, que nous avons désigné par $F_n(x)$, cesse d'être irréductible si l'on adjoint une racine primitive de l'unité telle, que son exposant ait un diviseur commun avec le nombre n. On a donc, enfin, ce résultat qui comprend comme cas spécial le théorème énoncé dans le § 1 :

Afin que l'équation qui ne contient que toutes les racines primitives de l'équation $x^n - 1$ devienne réductible en adjoignant une racine primitive de l'unité, il faut et il suffit que l'exposant de cette racine ait un diviseur commun avec le nombre n.

DEUXIÈME MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES;

PAR M. A. CAYLEY [*].

Je vais essayer de développer ici les propriétés qui se rapportent aux transformations linéaires des périodes des fonctions yx, gx, Gx, Zx, dont je me suis occupé dans le Mémoire sur les fonctions doublement périodiques que j'ai donné dans ce Recueil en 1845. Avant d'entrer en matière, je remarque que partant des expressions

$$\Omega = \omega + \omega' i,$$
$$\Upsilon = \upsilon + \upsilon' i,$$

des deux périodes, où $i = \sqrt{-1}$, on obtient, en écrivant

$$\Omega^* = \omega - \omega' i,$$
$$\Upsilon^* = \upsilon - \upsilon' i,$$

les équations

$$\Omega\Upsilon^* = \omega\upsilon + \omega'\upsilon' - i(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon),$$
$$\Omega^*\Upsilon = \omega\upsilon + \omega'\upsilon' + i(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon),$$

au moyen desquelles et des valeurs

$$\beta = \frac{\pi i(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)}{\Omega\Upsilon \text{ mod. } (\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)}, \qquad B = \frac{\pi(\omega\upsilon + \omega'\upsilon')}{\Omega\Upsilon \text{ mod. } (\omega\upsilon' - \omega'\upsilon}$$

des quantités β, B, on déduit les formules

$$B + \beta = \frac{\pi\Omega^*}{\Omega \text{ mod. } (\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)}, \qquad B - \beta = \frac{\pi\Upsilon^*}{\Upsilon \text{ mod. } (\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)}.$$

Je ne fais attention qu'aux transformations qui correspondent à des

(*) *Voir* le premier Mémoire, tome X de ce Journal, page 385.

entiers impairs et premiers, et je suppose, de plus, que la transformation soit toujours propre et régulière; c'est-à-dire qu'en écrivant

$$(2k+1)\Omega_{,} = \lambda\Omega + \mu\Upsilon = (\lambda, \mu),$$
$$(2k+1)\Upsilon_{,} = \nu\Omega + \rho\Upsilon = (\nu, \rho),$$

où $2k+1$ est un entier positif, impair et premier, et où λ, μ, ν, ρ sont des entiers tels, qu'au signe près, $\lambda\rho - \mu\nu$ soit égal à $2k+1$, je suppose

$$\lambda\rho - \mu\nu = 2k+1$$

(condition pour que la transformation soit propre), et, en outre,

$$\begin{matrix} \lambda \equiv 1, & \mu \equiv 0, \\ \nu \equiv 0, & \rho \equiv 1, \end{matrix} \quad (\text{mod. } 2)$$

(condition pour que la transformation soit régulière).

On trouve tout de suite

$$\Omega = \rho\Omega_{,} - \mu\Upsilon_{,} = (\rho, -\mu)_{,},$$
$$\Upsilon = -\nu\Omega_{,} + \lambda\Upsilon_{,} = (-\nu, \lambda)_{,};$$

j'écris aussi

$$\Omega_{,} = \omega_{,} + \omega'_{,} i, \quad \Omega^{*}_{,} = \omega_{,} - \omega'_{,} i,$$
$$\Upsilon_{,} = \upsilon_{,} + \upsilon'_{,} i, \quad \Upsilon^{*}_{,} = \upsilon_{,} - \upsilon'_{,} i,$$

et je suppose que $B_{,}$, $\beta_{,}$ soient des fonctions de $\omega_{,}, \upsilon_{,}$ telles que les fonctions B, β, de ω, υ.

Cela étant, je forme d'abord l'équation

$$(2k+1)(\omega_{,}\upsilon'_{,} - \omega'_{,}\upsilon_{,}) = \omega\upsilon' - \omega'\upsilon,$$

au moyen de laquelle l'équation

$$(B+\beta)\,\Omega = \frac{\pi}{\text{mod.}\,(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)}\,\Omega^{*}$$

se transforme en

$$(2k+1)(B+\beta)\,\Omega = \frac{\pi}{\text{mod.}\,(\omega_{,}\upsilon'_{,} - \omega'_{,}\upsilon_{,})}\,\Omega^{*}.$$

De là

$$\{(2k+1)(B+\beta)-B_{,}\}\Omega = \frac{\pi}{\text{mod.}(\omega_{,}\nu'_{,}-\omega'_{,}\nu_{,})}\left\{\Omega^{*}-\Omega.\frac{\omega_{,}\nu_{,}+\omega'_{,}\nu'_{,}}{\Omega_{,}\Upsilon_{,}}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{\text{mod.}(\omega_{,}\nu'_{,}-\omega'_{,}\nu_{,})}\left\{\rho\,\Omega^{*}_{,}-\mu\Upsilon^{*}_{,}-\frac{\omega_{,}\nu_{,}+\omega'_{,}\nu'_{,}}{\Omega_{,}\Upsilon_{,}}(\rho\,\Omega_{,}-\mu\,\Upsilon_{,})\right\}$$

$$= \frac{\pi}{\text{mod.}(\omega_{,}\nu'_{,}-\omega'_{,}\nu_{,})}\left\{\rho\left(\Omega^{*}_{,}-\frac{\omega_{,}\nu_{,}+\omega'_{,}\nu'_{,}}{\Upsilon_{,}}\right)-\mu\left(\Upsilon^{*}_{,}-\frac{\omega_{,}\nu_{,}+\omega'_{,}\nu'_{,}}{\Omega_{,}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi i(\omega_{,}\nu'_{,}-\omega'_{,}\nu_{,})}{\Omega_{,}\Upsilon_{,}\,\text{mod.}(\omega_{,}\nu'_{,}-\omega'_{,}\nu_{,})}(\rho\,\Omega_{,}+\mu\Upsilon_{,}),$$

ou enfin

$$\{\overline{2k+1}(B+\beta)-B_{,}\}\,\Omega = \beta_{,}(\rho,\mu)_{,};$$

et de même

$$\{\overline{2k+1}(B-\beta)-B_{,}\}\,\Omega = -\beta_{,}(\nu,\lambda)_{,}$$

équations qui seront bientôt utiles.

Je suppose d'abord que $2k+1$ soit égal à l'unité, transformation que l'on peut nommer *triviale*. La fonction $\mathrm{y}x$ est définie par l'équation

$$\mathrm{y}x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}Bx^{2}}x\,\Pi\left\{1+\frac{x}{(m,n)}\right\},\quad \text{mod.}(m,n)<\mathrm{T},\ \mathrm{T}=\infty;$$

dans $(m,n)=m\Omega+n\Upsilon$, les entiers m,n doivent prendre toutes les valeurs positives ou négatives (le seul système $m=0$, $n=0$ excepté) qui satisfont à l'inégalité

$$\text{mod.}(m,n)<\mathrm{T},$$

dont le second membre T sera ensuite supposé infini. Soit $\mathrm{y}_{,}x$ la fonction correspondante pour les périodes $\Omega_{,}$, $\Upsilon_{,}$; on aura

$$\mathrm{y}_{,}x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}B_{,}x^{2}}x\,\Pi\left\{1+\frac{x}{(m,n)_{,}}\right\},\quad \text{mod.}(m,n)_{,}<\mathrm{T},\ \mathrm{T}=\infty.$$

Or

$$\begin{aligned}(m,n)_{,} &= m\Omega_{,}+n\Upsilon_{,}\\ &= m(\lambda\Omega+\mu\Upsilon)+n(\nu\Omega+\rho\Upsilon)\\ &= (\lambda m+\nu n)\Omega+(\mu m+\rho n)\Upsilon\\ &= m_{,}\Omega+n_{,}\Upsilon\\ &= (m_{,},n_{,}).\end{aligned}$$

En écrivant, comme nous venons de le faire,

$$m_{,} = \lambda m + \nu n,$$
$$n_{,} = \nu m + \rho n,$$

on voit tout de suite qu'à chaque système de valeurs entières de m, n, correspond un système et un seul système de valeurs entières de $m_{,}$, $n_{,}$, et que de même à chaque système de valeurs entières de $m_{,}$, $n_{,}$, correspond un système et un seul système de valeurs entières de m, n; de plus, les systèmes $m = 0$, $n = 0$ et $m_{,} = 0$, $n_{,} = 0$, correspondent l'un à l'autre. Il est donc permis d'écrire

$$x\Pi\left\{1 + \frac{x}{(m, n)}\right\} = x\Pi\left\{1 + \frac{x}{(m, n)_{,}}\right\},$$

les limites comme auparavant; car, à cause de

$$(m, n)_{,} = (m_{,}, n_{,}),$$

la condition pour les limites, savoir :

$$\text{mod.}\,(m_{,} n)_{,} < \mathrm{T},\ \mathrm{T} = \infty,$$

devient

$$\text{mod.}\,(m, n) < \mathrm{T},\ \mathrm{T} = \infty.$$

Cela donne enfin l'équation

$$\mathrm{y}_{,} x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,} - \mathrm{B})x^2}\,\mathrm{y}x;$$

et, au moyen de cette équation, on obtient une équation correspondante pour la transformation de l'une quelconque des fonctions $\mathrm{y}x$, $\mathrm{g}x$, $\mathrm{G}x$, $\mathrm{Z}x$, définies par les équations

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{y}x &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}\mathrm{B}x^2}\cdot x\Pi\left\{1 + \frac{x}{(m, n)}\right\}, && \text{mod.}\,(m, n) < \mathrm{T},\\
\mathrm{g}x &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}\mathrm{B}x^2}\cdot \Pi\left\{1 + \frac{x}{(\bar{m}, n)}\right\}, && \text{mod.}\,(\bar{m}, n) < \mathrm{T},\\
\mathrm{G}x &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}\mathrm{B}x^2}\cdot \Pi\left\{1 + \frac{x}{(m, \bar{n})}\right\}, && \text{mod.}\,(m, \bar{n}) < \mathrm{T},\\
\mathrm{Z}x &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}\mathrm{B}x^2}\cdot \Pi\left\{1 + \frac{x}{(\bar{m}, \bar{n})}\right\}, && \text{mod}\,(\bar{m}, \bar{n}) < \mathrm{T},
\end{aligned}\right\}\quad \mathrm{T} = \infty;$$

(équations dans lesquelles $\bar{m} = m + \frac{1}{2}$, $\bar{n} = n + \frac{1}{2}$). Je prends par exemple la fonction $\mathrm{g}x$, et j'écris dans l'équation entre $\mathrm{y}_{,}x$ et $\mathrm{y}x$, $x + \frac{1}{2}\Omega$ au lieu de x. Soit pour un moment $\rho = 2\rho' + 1$, $\mu = 2\mu'$;

cela donne

$$x + \tfrac{1}{2}\Omega = x + \tfrac{1}{2}(\rho\Omega_{,} - \mu\Upsilon_{,}) = x + (\bar{\rho}', -\mu').$$

Donc

$$y_{,}(x + \tfrac{1}{2}\Omega) = \varepsilon^{\frac{1}{2}\beta_{,}x(\bar{\rho}', \mu')_{,}} M_{,}g_{,}x,$$

c'est-à-dire

$$y_{,}(x + \tfrac{1}{2}\Omega) = \varepsilon^{\frac{1}{2}\beta_{,}x(\rho, \mu)_{,}} M_{,}g_{,}x;$$

de plus,

$$y(x + \tfrac{1}{2}\Omega) = \varepsilon^{\frac{1}{2}\beta\Omega x} M g x.$$

Ces substitutions étant effectuées, les coefficients M, $M_{,}$ doivent être éliminés en écrivant $x = 0$; cela donne

$$g_{,}x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(B_{,} - B)x^2} \varepsilon^{\frac{1}{2}x[(B + \beta - B_{,})\Omega - \frac{1}{2}\beta_{,}(\rho, \mu)_{,}]} g x,$$

ou enfin, au moyen d'une équation déjà trouvée,

$$g_{,}x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(B_{,} - B)x^2} g x,$$

et de même pour les fonctions Gx, Zx.

Donc enfin, en représentant par Jx l'une quelconque des fonctions yx, gx, Gx, Zx, on aura

$$J_{,}x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(B_{,} - B)x^2} Jx,$$

où $J_{,}x$ est ce que devient Jx au moyen d'une transformation triviale (propre et régulière) des périodes.

Je passe à présent à la transformation pour un nombre impair et premier $(2k + 1)$ quelconque; mais pour cela on a besoin de connaître la valeur de la fonction

$$u' = \Pi\left\{1 + \frac{x}{(m, n) + y}\right\}, \quad \text{mod.}\ \{(m, n) + y\} < T, \quad T = \infty,$$

où $y = a + bi$ est une quantité réelle ou imaginaire quelconque.

Soit u ce que devient u' en prenant pour la condition par rapport aux limites

$$\text{mod.}\ (m, n) < T, \quad T = \infty;$$

on trouve sans peine

$$u = \varepsilon^{\frac{1}{2}Bx^2 + Bxy} \frac{y(x + y)}{y(y)}.$$

Pour trouver u', je forme l'équation

$$u : u' = \Pi \left\{ 1 + \frac{x}{(m, n)} \right\},$$

la limite inférieure du produit infini double étant

$$\text{mod.} \{ (m, n) + y \} > \mathrm{T},$$

et la limite supérieure

$$\text{mod.} (m, n) < \mathrm{T}, \quad \mathrm{T} = \infty :$$

cela donne

$$\begin{aligned} \log u - \log u' &= x \sum \frac{1}{(m, n) + y} - \frac{1}{2} x^2 . \sum \frac{1}{\{(m, n) + y\}^2} + \ldots \\ &= x \sum \frac{1}{(m, n)} - \frac{1}{2} (x^2 + 2yx) \sum \frac{1}{(m, n)^2} + \ldots \\ &= x \sum \frac{1}{(m, n)}, \end{aligned}$$

car on peut démontrer que

$$\sum \frac{1}{(m, n)^2} = 0, \quad \sum \frac{1}{(m, n)^3} = 0, \quad \text{etc.}$$

Pour cela, observons que m et n étant infinis puisque T l'est, la première des sommes dont il s'agit peut se remplacer par l'intégrale double

$$\mathrm{I} = \iint \frac{dm\, dn}{(m, n)^2},$$

laquelle (en écrivant $m = r \cos \theta$, $n = r \sin \theta$, ce qui donne, comme on sait, $dm\, dn = r dr d\theta$) devient

$$\mathrm{I} = \iint \frac{dr\, d\theta}{r (\Omega \cos \theta + r \sin \theta)^2},$$

d'où

$$\mathrm{I} = \iint \frac{(\log r)\, d\theta}{\Omega \cos \theta + r \sin \theta)^2},$$

en prenant $(\log r)$ entre les limites convenables. Pour trouver ces limites, j'écris

$$(m, n) + y = r (\Omega \cos \theta + \Upsilon \sin \theta) + y;$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} &\text{mod.}^2 \{ (m, n) + y \} \\ &= \{ r . (\Omega \cos \theta + \Upsilon \sin \theta) + y \} \{ r (\Omega^* \cos \theta + \Upsilon^* \sin \theta) + y^* \}, \end{aligned}$$

savoir, à l'une des limites

$$r^2.(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)(\Omega^*\cos\theta + \Upsilon^*\sin\theta)$$
$$+ r\{y^*(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta) + y(\Omega^*\cos\theta + \Upsilon^*\sin\theta)\} + T^2 = 0;$$

ou, en négligeant les puissances négatives de T,

$$r = \frac{T}{\sqrt{(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)(\Omega^*\cos\theta + \Upsilon^*\sin\theta)}}$$
$$- \frac{1}{2}\left\{\frac{y}{\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta} + \frac{y^*}{\Omega^*\cos\theta + \Upsilon^*\sin\theta}\right\},$$

et à l'autre limite,

$$r = \frac{T}{\sqrt{(\Omega\cos\theta + \Upsilon\sin\theta)(\Omega^*\cos\theta + \Upsilon^*\sin\theta)}}.$$

Or, en représentant ces deux équations par

$$r = R - \varphi, \quad r = R,$$

on trouve, pour la valeur de $(\log r)$ entre les deux limites,

$$\log R - \log(R - \varphi) = -\log\left(1 - \frac{\varphi}{R}\right) = 0,$$

à cause de la valeur infinie de R. Ainsi la somme cherchée est nulle; et il est tout clair que les sommes suivantes $\sum\frac{1}{(m,n)^3}$, etc., se réduisent de même à zéro.

Donc enfin,

$$\log u - \log u' = x\sum\frac{1}{(m,n)}.$$

Cela fait voir que

$$u' = \varepsilon^{-kx}u,$$

le coefficient k étant donné au moyen de l'équation

$$k = \sum\frac{1}{(n,m)},$$

où la somme est prise, comme auparavant, entre les limites

$$\text{mod.}\{(m,n) + y\} > T, \quad \text{mod.}(m,n) < T, \; T = \infty.$$

Mais il n'est pas permis d'écrire

$$k = \int\int\frac{dm\,dn}{(m,n)}.$$

En effet, cette intégrale n'est que le premier terme d'une suite dont il faudrait, pour obtenir un résultat exact, prendre deux termes; le second terme de la suite serait une intégrale prise le long d'un contour, et il serait, ce me semble, très-difficile d'en trouver la valeur. Pour trouver la valeur de k, je remarque que k sera fonction linéaire des quantités $T, y, y^*, \frac{y^2}{T}$, etc., qui entrent dans les valeurs de r; donc, puisqu'en dernière analyse $T = \infty$, k ne peut être que de la forme $Ly + My^*$. Cela étant, en substituant pour u' sa valeur, je forme l'équation

$$\frac{y(x+y)}{y(y)} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}Bx^2}\,\varepsilon^{(-By+Ly+My^*)x}.\Pi\left\{1+\frac{x}{(m,n)+y}\right\},$$
$$\text{mod.}\,\{(m,n)+y\} < T, \quad T = \infty,$$

et j'écris successivement

$$y = \tfrac{1}{2}\Omega, \quad y = \tfrac{1}{2}\Upsilon,$$

ce qui donne pour les valeurs correspondantes du produit infini double $\varepsilon^{-\frac{1}{2}Bx^2}.gx$ et $\varepsilon^{-\frac{1}{2}Bx^2}.Gx$; en comparant les valeurs ainsi obtenues avec les équations qui donnent les valeurs de $y(x+\frac{1}{2}\Omega)$, $y(x+\frac{1}{2}\Upsilon)$, on trouve

$$L = 0, \quad M = \frac{\pi}{\text{mod.}(\omega v' - \omega' v)},$$

ou enfin,

$$\frac{y(x+y)}{y(y)} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}Bx^2}\,\varepsilon^{\left(-By+\frac{\pi}{\text{mod.}(\omega v'-\omega' v)}y^*\right)x}.\Pi\left\{1+\frac{x}{(m,n)+y}\right\},$$
$$\text{mod.}\,\{(m,n)+y\} < T, \quad T = \infty,$$

laquelle est l'équation qu'il s'agissait d'établir. Il est à peine nécessaire de faire la remarque que pour $y = 0$, on doit considérer à part le facteur $1+\frac{x}{y}$, lequel multiplié par $y(y)$ devient tout simplement x; l'équation subsiste donc dans ce cas.

En revenant au problème des transformations linéaires, partant des équations

$$(2k+1)\Omega_{,} = \lambda\Omega + \mu\Upsilon,$$
$$(2k+1)\Upsilon_{,} = \nu\Omega + \rho\Upsilon,$$

je suppose d'abord que les coefficients λ, ν ne satisfassent pas à la fois aux deux conditions

$$\lambda \equiv 0, \quad \nu \equiv 0, \quad \text{mod.}\,(2k+1),$$

et je prends p, q des entiers quelconques tels, que $\lambda p + \nu q$ ne soit pas $\equiv 0$, mod. $(2k+1)$.

Cela étant, soient

$$\lambda p + \nu q = p_{,},$$
$$\mu p + \rho q = q_{,},$$
$$(2k+1)\psi = p_{,}\Omega + q_{,}\Upsilon,$$

et, par conséquent,

$$\psi = p\Omega_{,} + q\Upsilon_{,}.$$

Je forme l'équation

$$(m_{,}, n_{,}) + s\psi = (m, n)_{,},$$

savoir

$$m_{,}\Omega + n_{,}\Upsilon + s\psi = m\Omega_{,} + n\Upsilon_{,},$$

c'est-à-dire

$$\lambda m + \nu n - sp_{,} = (2k+1)m_{,},$$
$$\mu m + \nu n - sq_{,} = (2k+1)n_{,},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$m - sp = m_{,}\rho - n_{,}\nu,$$
$$n - sq = m_{,}\mu - n_{,}\lambda.$$

Or, $m_{,}$, $n_{,}$, s étant des entiers donnés, m, n seront aussi des entiers; de même, m, n étant des entiers donnés, on trouve de k à $-k$ un entier s qui donne $m_{,}$ un entier. Mais cela étant, $n_{,}$ sera aussi un entier; car autrement $n_{,}$ serait une fraction ayant pour dénominateur, lequel on voudrait, des nombres $2k+1$, λ, ν, ce qui est impossible à moins que

$$\lambda \equiv 0, \quad \nu \equiv 0, \quad \text{mod.}\,(2k+1).$$

Mais si ces équations avaient lieu, on trouverait d'abord s de manière à avoir $n_{,}$ entier, et alors, puisqu'on n'a pas aussi

$$\mu \equiv 0, \quad \rho \equiv 0, \quad \text{mod.}\,(2k+1)$$

(en effet, cela est impossible à cause de l'équation $\lambda\rho - \mu\nu = 2k + 1$), on démontrerait, comme auparavant, pour $n_{,}$, que $m_{,}$ est entier. Donc, enfin, m, n étant des entiers donnés, on trouve pour $m_{,}$, $n_{,}$, s un système d'entiers tel que s soit compris de k à $-k$, et l'on voit sans peine qu'il n'y a qu'un seul système de cette espèce.

A présent, partant de l'équation

$$\frac{\mathrm{y}(x+y)}{\mathrm{y}(y)} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}\mathrm{B}x^2} \cdot \varepsilon^{\left(-\mathrm{B}y + \frac{\pi}{\mathrm{mod.}(\omega\upsilon' - \omega'\upsilon)}y^2\right)x} \cdot \Pi\left\{1 + \frac{x}{(m_{,}, n_{,}) + y}\right\}$$

(et faisant attention à la particularité que présente le cas de $y = 0$), j'écris successivement

$$y = 0, \quad y = \pm\psi, \ldots, \quad y = \pm k\psi,$$

et je forme le produit des équations ainsi trouvées. Cela donne, à cause de $(m_{,}, n_{,}) + s\psi = (m, n)_{,}$,

$$\Pi \cdot \frac{\mathrm{y}(x + s\psi)}{\mathrm{y}(s\psi)} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(2k+1)\mathrm{B}x^2} \cdot x\,\Pi\left\{1 + \frac{x}{(m, n)_{,}}\right\},$$

la condition, par rapport aux limites, étant

$$\mathrm{mod.}\,(m, n)_{,} < \mathrm{T}, \quad \mathrm{T} = \infty.$$

Or

$$\mathrm{y}_{,}x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}\mathrm{B}_{,}x^2} \cdot x\,\Pi\left\{1 + \frac{x}{(m, n)_{,}}\right\},$$

avec la même condition, par rapport aux limites; donc, enfin,

$$\mathrm{y}_{,}x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,} - (2k+1)\mathrm{B})x^2} \cdot \Pi\left\{\frac{\mathrm{y}(x + s\psi)}{\mathrm{y}(s\psi)}\right\},$$

où, dans le numérateur, s doit avoir toutes les valeurs entières depuis $s = -k$ jusqu'à $s = +k$, y compris $s = 0$, et dans le dénominateur ces mêmes valeurs, hormis la valeur $s = 0$.

Il est, à présent, facile de faire voir que cette propriété subsiste pour l'une quelconque des fonctions $\mathrm{y}x$, $\mathrm{g}x$, $\mathrm{G}x$, $\mathrm{Z}x$; en effet, pour la démontrer pour $\mathrm{g}x$, j'écris $x + \frac{1}{2}\Omega$ au lieu de x; en prenant, pour un moment, $\rho = 2\rho' + 1$, $\mu = 2\mu'$, cela donne

$$x + \tfrac{1}{2}\Omega = x + (\rho', -\mu').$$

$$\mathrm{y}_{,}\left(x + \tfrac{1}{2}\Omega\right) = \varepsilon^{\beta_{,}x(\rho', \mu')_{,}}\,\mathrm{M}\mathrm{g}_{,}x = \varepsilon^{\frac{1}{2}\beta_{,}x(\rho, \mu)_{,}}\,\mathrm{M}_{,}\mathrm{g}x,$$

c'est-à-dire

$$\frac{y_{,}(x+\frac{1}{2}\Omega)}{y_{,}(\frac{1}{2}\Omega)} = \varepsilon^{\frac{1}{2}\beta_{,}x(\rho,\mu)_{,}} g_{,}x.$$

Or, on déduit de l'expression pour $y_{,}x$,

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}\beta_{,}x(\rho,\mu)_{,}} \cdot \frac{y_{,}(x+\frac{1}{2}\Omega)}{y_{,}(\frac{1}{2}\Omega)}$$

$$= \varepsilon^{-\frac{1}{2}\beta_{,}x(\rho,\mu)_{,}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}(B_{,}-\overline{2k+1}B)(x^2+\Omega x)} \cdot \Pi \frac{y(x+s\psi+\frac{1}{2}\Omega)}{y(s\psi+\frac{1}{2}\Omega)}$$

$$= \varepsilon^{-\frac{1}{2}\beta_{,}x(\rho,\mu)_{,}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}(B_{,}-\overline{2k+1}B)x^2} \varepsilon^{\frac{1}{2}(2k+1)\beta\Omega x} \Pi \frac{g(x+s\psi)}{g(s\psi)}:$$

c'est-à-dire

$$g_{,}x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(B_{,}-\overline{2k+1}B)x^2} \varepsilon^{\frac{1}{2}x\left\{-B_{,}\Omega+\overline{2k+1}(B+\beta)\Omega-\beta_{,}(\rho,\mu)_{,}\right\}} \Pi \frac{g(x+s\psi)}{g(s\psi)},$$

ou enfin, à cause de l'équation

$$-B_{,}\Omega + \overline{2k+1}(B+\beta)\Omega - \beta_{,}(\rho,\mu)_{,} = 0,$$

la valeur de $g_{,}x$ est

$$g_{,}x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(B_{,}-\overline{2k+1}B)x^2} \cdot \Pi \frac{g(x+s\psi)}{g(s\psi)}:$$

et en représentant, comme auparavant, l'une quelconque des fonctions yx, gx, Gx, Zx par Jx, on a l'équation

$$J_{,}x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(B_{,}-\overline{2k+1}B)x^2} \cdot \Pi \frac{J(x+s\psi)}{J(s\psi)},$$

équation dans laquelle s doit avoir, dans le numérateur, toutes les valeurs entières depuis $s=-k$ jusqu'à $s=k$, y compris $s=0$, et dans le dénominateur, ces mêmes valeurs, hormis la valeur $s=0$.

Je suppose que les valeurs de $p_{,}$, $q_{,}$ soient données (cela va sans dire que l'on ne doit pas avoir à la fois $p_{,}\equiv 0$, $q_{,}\equiv 0$, mod. $2k+1$), et je remarque que l'on a, pour déterminer λ, μ, ν, ρ, les conditions

$$\left.\begin{array}{l} \rho p_{,} - \nu q_{,} \equiv 0, \\ -\mu p_{,} + \lambda q_{,} \equiv 0, \end{array}\right\} \text{mod. } (2k+1),$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda \equiv 1, & \mu \equiv 0, \\ \nu \equiv 0, & \rho \equiv 1, \end{array}\right\} (\text{mod. } 2),$$

$$\lambda\rho - \mu\nu = 2k+1.$$

Et cela étant, on aura ensuite, en rassemblant toutes les équations qui ont rapport à la transformation,

$$\begin{aligned} \rho p_{,} - \nu q_{,} &= (2k+1)\, p, \\ -\mu p_{,} + \lambda q_{,} &= (2k+1)\, q, \\ \Psi &= p_{,}\Omega + q_{,}\Upsilon, \\ (2k+1)\,\Omega_{,} &= \lambda\,\Omega + \mu\,\Upsilon, \\ (2k+1)\,\Upsilon_{,} &= \nu\,\Omega + \rho\,\Upsilon. \end{aligned}$$

Or, quoique les valeurs de λ, μ, ν, ρ ne soient pas complétement déterminées au moyen de ces conditions, cependant il est clair que la valeur de la fonction $J_{,}x$ ne dépend que des valeurs de $p_{,}$, $q_{,}$ (en effet, ces valeurs suffisent pour déterminer la quantité $\Psi = p_{,}\Omega + q_{,}\Upsilon$, de laquelle dépend la fonction $J_{,}x$). Les formes différentes de $J_{,}x$, pour les systèmes de valeurs de λ, μ, ν, ρ, qui correspondent à des valeurs données de $p_{,}$, $q_{,}$, doivent donc se dériver de l'une quelconque de ces formes, au moyen d'une transformation triviale des modules $\Omega_{,}$, $\Upsilon_{,}$. Il est, de plus, clair que les valeurs de $p_{,}$, $q_{,}$, qui sont égales à des multiples de $(2k+1)$ près, ne donnent qu'une seule valeur de $J_{,}x$. Je suppose d'abord que

$$p_{,} \equiv 0, \quad \text{mod.}\ (2k+1);$$

on peut trouver un entier θ tel que

$$\theta p_{,} \equiv 1, \quad \text{mod.}\ (2k+1),$$

soit

$$\theta q_{,} \equiv q_{,}, \quad \text{mod.}\ (2k+1);$$

cela donne

$$\theta\,(p_{,}\Omega + q_{,}\Upsilon_{,}) \equiv \Omega + q_{,}\Upsilon, \quad \text{mod.}\ (2k+1),$$

savoir

$$\theta\Upsilon \equiv \Omega + q_{,}\Upsilon, \quad \text{mod.}\ (2k+1).$$

Mais en donnant à s des valeurs entières quelconques, depuis $-k$ jusqu'à k, le système des valeurs de $s\psi$ est équivalent au système des valeurs de $s\theta\psi$, mod. $(2k+1)$; il est donc permis d'écrire, sans perte de généralité,

$$\Psi = \Omega + q_{,}\Upsilon.$$

De même pour

$$p_{,} \equiv 0, \quad \text{mod.}\ (2k+1).$$

On démontre que l'on peut donner à $q_{,}$ une valeur quelconque, sans changer pour cela la valeur de $J_{,}x$; il convient d'avoir $p_{,}$ impair et $q_{,}$ pair. J'écris donc, pour le premier cas, $2q_{,}$ au lieu de $q_{,}$, et je suppose que, dans le deuxième cas, les valeurs de $p_{,}$, $q_{,}$ soient

$$p_{,} = 2k + 1, \quad q_{,} = 2.$$

Cela donne :

Premier cas.

$$\Psi = \Omega + 2q_{,}\Upsilon,$$

$q_{,}$ un entier quelconque, y compris zéro, depuis $-k$ jusqu'à $+k$.

Deuxième cas.

$$\Psi = (2k + 1)\Omega + 2\Upsilon.$$

Le nombre des valeurs différentes de Ψ sera donc, en tout, $2k + 2$.

On obtient tout de suite, pour le premier cas, le système d'équations

$$\begin{aligned} p_{,} &= 1, \quad q_{,} = 2q_{,}, \\ \lambda &= 1, \quad \mu = 2q_{,}, \\ \nu &= 0, \quad \rho = (2k + 1), \\ p &= 1, \quad q = 0; \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_{,} &= \frac{1}{2k+1}(\Omega + 2q_{,}\Upsilon), \\ \Omega_{,} &= \frac{1}{2k+1}(\Omega + 2q_{,}\Upsilon) = \psi, \\ \Upsilon_{,} &= \Upsilon. \end{aligned} \right.$$

Le cas particulier le plus simple est celui de $q_{,} = 0$; cela donne

$$\psi = \Omega_{,} = \frac{1}{2k+1}\Omega, \Upsilon_{,} = \Upsilon,$$

et, de là,

$$\frac{\Omega_{,}}{\Upsilon_{,}} = \frac{1}{2k+1}\frac{\Omega}{\Upsilon};$$

et même le cas général se réduit à celui-ci, car, au moyen d'une trans-

formation *triviale*, on obtiendrait

$$\Omega' = \Omega + 2\,\mathrm{q}_{,}\,\Upsilon,\quad \Upsilon' = \Upsilon,$$

et puis

$$\psi = \Omega_{,} = \frac{1}{2k+1}\,\Omega',\ \Upsilon_{,} = \Upsilon',$$

et, de là,

$$\frac{\Omega_{,}}{\Upsilon_{,}} = \frac{1}{2k+1}\,\frac{\Omega'}{\Upsilon'}.$$

Les équations correspondantes pour le deuxième cas sont :

$$\begin{aligned}
&p_{,} = 2k+1, && q_{,} = 2,\\
&\lambda = 2k+1, && \mu = 0,\\
&\nu = 0, && \rho = 1,\\
&p = 1, && q = 2,\\
&\psi = \frac{1}{2k+1}\{(2k+1)\Omega + 2\Upsilon\}, && \\
&\Omega_{,} = \Omega, && \\
&\Upsilon_{,} = \frac{1}{2k+1}\,\Upsilon; &&
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{\Omega_{,}}{\Upsilon_{,}} = (2k+1)\cdot\frac{\Omega}{\Upsilon}.$$

J'ajoute, sans m'arrêter pour les démontrer, quelques formules de transformation pour le nombre 2; je trouve d'abord

$$\Omega_{,} = \tfrac{1}{2}\,\Omega,\quad \Upsilon_{,} = \Upsilon,$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{y}_{,}\,x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,}-2\mathrm{B})x^2}\,\mathrm{y}\,x\,\mathrm{g}\,x.\\
&\mathrm{g}_{,}\,x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,}-2\mathrm{B})x^2}\,\frac{\mathrm{g}\left(x-\frac{1}{4}\Omega\right)\mathrm{g}\left(x+\frac{1}{4}\Omega\right)}{\mathrm{g}^2\left(\frac{1}{4}\Omega\right)}.\\
&\mathrm{G}_{,}\,x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,}-2\mathrm{B})x^2}\,\mathrm{G}\,x\,\mathrm{Z}\,x,\\
&\mathrm{Z}_{,}\,x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,}-2\mathrm{B})x^2}\,\frac{\mathrm{Z}\left(x-\frac{1}{4}\Omega\right)\mathrm{Z}\left(x+\frac{1}{4}\Omega\right)}{\mathrm{Z}^2\left(\frac{1}{4}\Omega\right)}.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations donnent, en introduisant les fonctions elliptiques, φx.

fx, $\mathrm{F}x$ données au moyen de

$$\varphi x = \frac{\mathrm{y}x}{\mathrm{Z}x}, \quad fx = \frac{gx}{\mathrm{Z}x}, \quad \mathrm{F}x = \frac{\mathrm{G}x}{\mathrm{Z}x},$$

les équations

$$\frac{\varphi_{,}x}{\mathrm{F}_{,}x} = \varphi x \cdot \frac{fx}{\mathrm{F}x},$$

$$f_{,}x = \frac{f(x - \frac{1}{4}\Omega)\, f(x + \frac{1}{4}\Omega)}{f^2(\frac{1}{4}\Omega)},$$

dont la seconde peut encore s'écrire sous la forme

$$f_{,}x = \frac{1 - c^2 \cdot \dfrac{\mathrm{F}^2(\frac{1}{4}\Omega)}{f^2(\frac{1}{4}\Omega)} \cdot \varphi^2 x}{1 + e^2 c^2 \cdot \varphi^2(\frac{1}{4}\Omega) \cdot \varphi^2 x},$$

et les deux équations combinées ensemble conduisent sans peine à la valeur des modules $c_{,}$, $e_{,}$. On trouve en effet, en mettant comme à l'ordinaire $b^2 = c^2 + e^2$,

$$c_{,}^2 = 4\,bc,$$

$$e_{,}^2 = (b - c)^2,$$

et puis

$$\varphi_{,}x = \frac{1 - c.(c - b)\,\varphi^2 x}{\varphi x\, fx},$$

$$f_{,}x = \frac{1 - c\,(c + b)\,\varphi^2 x}{1 - c\,(c - b)\,\varphi^2 x},$$

$$\mathrm{F}_{,}x = \frac{\mathrm{F}x}{1 - c\,(c - b)\,\varphi^2 x}.$$

formules qui correspondent à celles de la transformation de Lagrange. Les équations pour $\mathrm{y}_{,}x$, $\mathrm{Z}_{,}x$ donnent encore une valeur de $\varphi_{,}x$, laquelle, égalée à la valeur qui vient d'être trouvée, donne

$$\frac{\mathrm{y}x\, gx \cdot \mathrm{Z}^2(\frac{1}{4}\Omega)}{\mathrm{Z}(x - \frac{1}{4}\Omega)\, \mathrm{Z}(x + \frac{1}{4}\Omega)} = \frac{\varphi x\, fx}{1 - c\,(c - b)\,\varphi^2 x}.$$

On obtient tout de suite les formules pour la transformation analogue

$\Omega_{,} = \Omega$, $\Upsilon_{,} = \frac{1}{2}\Upsilon$. Mais il faut de plus considérer le système

$$\Omega_{,} = \tfrac{1}{2}(\Omega - \Upsilon), \quad \Upsilon_{,} = \tfrac{1}{2}(\Omega + \Upsilon):$$

on aura alors

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{y}_{,}x &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,}-2\mathrm{B})x^2}\,\mathrm{g}x\,\mathrm{Z}x,\\
\mathrm{g}_{,}x &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,}-2\mathrm{B})x^2}\cdot\frac{\mathrm{y}\left(x+\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)\mathrm{y}\left(x-\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)}{-\mathrm{y}^2\left(\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)}\\
&= \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,}-2\mathrm{B})x^2}\cdot\frac{\mathrm{Z}\left(x+\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)\mathrm{Z}\left(x+\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)}{\mathrm{Z}^2\left(\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)},\\
\mathrm{G}_{,}x &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,}-2\mathrm{B})x^2}\cdot\frac{\mathrm{y}\left(x+\frac{1}{4}\overline{\Omega+\Upsilon}\right)\mathrm{y}\left(x-\frac{1}{4}\overline{\Omega+\Upsilon}\right)}{-\mathrm{y}^2\left(\frac{1}{4}\overline{\Omega+\Upsilon}\right)}\\
&= \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,}-2\mathrm{B})x^2}\cdot\frac{\mathrm{Z}\left(x+\frac{1}{4}\overline{\Omega+\Upsilon}\right)\mathrm{Z}\left(x-\frac{1}{4}\overline{\Omega+\Upsilon}\right)}{\mathrm{Z}^2\left(\frac{1}{4}\overline{\Omega+\Upsilon}\right)},\\
\mathrm{Z}_{,}x &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}_{,}-2\mathrm{B})x^2}\cdot\mathrm{g}x\,\mathrm{G}x;
\end{aligned}\right.$$

$$c_{,}^2 = (e - ic)^2,$$

$$-e_{,}^2 = (e + ic)^2,$$

$$\varphi_{,}x = \frac{\varphi x}{fx\,\mathrm{F}x},$$

$$f_{,}x = \frac{1 + ice\varphi^2 x}{fx\,\mathrm{F}x},$$

$$\mathrm{F}_{,}x = \frac{1 - ice\varphi^2 x}{fx\,\mathrm{F}x}:$$

$$\frac{1 + ice\varphi^2 x}{fx\,\mathrm{F}x} = \frac{\mathrm{Z}\left(x+\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)\mathrm{Z}\left(x-\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)}{\mathrm{Z}^2\left(\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)\mathrm{g}x\,\mathrm{G}x},$$

$$\frac{1 - ice\varphi^2 x}{fx\,\mathrm{F}x} = \frac{\mathrm{Z}\left(x+\frac{1}{4}\overline{\Omega+\Upsilon}\right)\mathrm{Z}\left(x-\frac{1}{4}\overline{\Omega+\Upsilon}\right)}{\mathrm{Z}^2\left(\frac{1}{4}\overline{\Omega+\Upsilon}\right)\mathrm{g}x\,\mathrm{G}x},$$

$$\frac{1 + ice\varphi^2 x}{1 - ice\varphi^2 x} = \frac{\mathrm{Z}\left(x+\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)\mathrm{Z}\left(x-\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)\cdot\mathrm{Z}^2\left(\frac{1}{4}\overline{\Omega+\Upsilon}\right)}{\mathrm{Z}\left(x+\frac{1}{4}\overline{\Omega+\Upsilon}\right)\mathrm{Z}\left(x-\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)\cdot\mathrm{Z}^2\left(\frac{1}{4}\overline{\Omega-\Upsilon}\right)}:$$

ou, au moins, ces formules seront exactes au signe de i près; car il serait peut-être difficile de déterminer quel est le signe qu'on doit donner à cette quantité.

DÉMONSTRATION

D'UN

THÉORÈME SUR LES DÉTERMINANTS;

PAR M. BAZIN,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Ce théoreme, qui nous sera utile dans le Mémoire ci-après sur la composition des formes quadratiques à quatre variables, est l'extension d'un théorème donné par M. Gauss dans les *Disquisitiones arithmeticæ*.

Soient deux systèmes

$$(S)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \alpha, & \beta, & \gamma, \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)}, \ldots \end{array}\right\}$$

et

$$(S_1)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \ldots \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(n-1)}, & \beta_1^{(n-1)}, & \gamma_1^{(n-1)}, \ldots \end{array}\right\},$$

chacun de n séries de m nombres entiers, m étant $> n$. Si ces deux systèmes (S) et (S_1) sont tels, que tout déterminant Δ_1 formé avec n colonnes verticales quelconques du système (S_1), par exemple

$$\left\{\begin{array}{lllll} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \ldots, & \lambda_1 \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1, \ldots, & \lambda'_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(n-1)}, & \beta_1^{(n-1)}, & \gamma_1^{(n-1)}, \ldots, & \lambda_1^{(n-1)} \end{array}\right\},$$

ait un rapport constant et entier k avec le déterminant Δ formé au moyen des n colonnes correspondantes du système (S),

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha, & \beta, & \gamma,\ldots, & \lambda \\ \alpha', & \beta', & \gamma',\ldots, & \lambda' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)},\ldots, & \lambda^{(n-1)} \end{array}\right\},$$

en sorte que $\Delta_1 = k\Delta$, et si, en outre, le plus grand commun diviseur de tous les déterminants Δ, Δ', Δ'', etc., que l'on obtient en combinant n à n les différentes colonnes de (S) est égal à l'unité, on pourra trouver n^2 nombres entiers,

$$\begin{array}{llll} M, & N, & P,\ldots, & S, \\ M', & N', & P',\ldots, & S', \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M^{(n-1)}, & N^{(n-1)}, & P^{(n-1)},\ldots, & S^{(n-1)}, \end{array}$$

qui soient tels, que l'on ait

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = M\alpha + N\alpha' + P\alpha'' + \ldots + S\alpha^{(n-1)}, \\ \alpha'_1 = M'\alpha + N'\alpha' + P'\alpha'' + \ldots + S'\alpha^{(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^{(n-1)} = M^{(n-1)}\alpha + N^{(n-1)}\alpha' + P^{(n-1)}\alpha'' + \ldots + S^{(n-1)}\alpha^{(n-1)}, \\ \beta_1 = M\beta + N\beta' + P\beta'' + \ldots + S\beta^{(n-1)}, \\ \beta'_1 = M'\beta + N'\beta' + P'\beta'' + \ldots + S'\beta^{(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta^{(n-1)} = M^{(n-1)}\beta + N^{(n-1)}\beta' + P^{(n-1)}\beta'' + \ldots + S^{(n-1)}\beta^{(n-1)}, \\ \gamma_1 = M\gamma + N\gamma' + P\gamma'' + \ldots + S\gamma^{(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \text{etc.}, \end{array}\right.$$

et que leur déterminant soit égal au rapport constant k.

Démonstration. — Le plus grand commun diviseur des déterminants Δ, Δ', Δ'', etc., formés avec les diverses combinaisons des colonnes de (S) étant l'unité, on peut trouver des nombres entiers A, A', A'', etc., tels que

$$(2)\qquad A\Delta + A'\Delta' + A''\Delta'' + \ldots = \sum A\Delta = 1.$$

Considérons spécialement l'un de ces déterminants, par exemple celui des n lettres,

$$(3)\qquad \left\{\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, \ldots, & \lambda, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \ldots, & \lambda', \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)}, \ldots, & \lambda^{(n-1)} \end{matrix}\right\},$$

que nous représentons par Δ. Remarquons qu'il peut s'écrire sous la forme

$$\Delta = \alpha\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots + \lambda\frac{d\Delta}{d\lambda};$$

les dérivées $\frac{d\Delta}{d\alpha}, \frac{d\Delta}{d\beta}, \ldots, \frac{d\Delta}{d\lambda}$ ne contiennent pas les n lettres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$.

Si nous remplaçons, dans le système (3), $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \lambda_1$, le déterminant du nouveau système ainsi obtenu sera

$$\alpha_1\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta_1\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma_1\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots + \lambda_1\frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

Effectuons le même changement dans les déterminants Δ', Δ'', etc., c'est-à-dire remplaçons dans chacun d'eux les nombres de la première ligne horizontale par les nombres correspondants de (S_1), et multiplions les déterminants ainsi déduits de Δ', Δ'', etc., par les coefficients A', A'', etc., de l'équation (2). nous aurons, en désignant par M la somme de tous ces produits,

$$M = \sum A\left(\alpha_1\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta_1\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma_1\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots\right).$$

Posons de même

$$M' = \sum A\left(\alpha'_1\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta'_1\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma'_1\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots\right),$$

$$M'' = \sum A\left(\alpha''_1\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta''_1\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma''_1\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M^{(n-1)} = \sum A\left(\alpha_1^{(n-1)}\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta_1^{(n-1)}\frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma_1^{(n-1)}\frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots\right).$$

De même que nous avons écrit Δ sous la forme $\alpha \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta \frac{d\Delta}{d\beta} + \ldots$, nous aurions pu l'écrire sous la forme analogue $\alpha' \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta' \frac{d\Delta}{d\beta'} + \ldots$ et poser

$$N = \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \ldots\right),$$

$$N' = \sum A \left(\alpha'_1 \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta'_1 \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma'_1 \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N^{(n-1)} = \sum A \left(\alpha_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \ldots\right).$$

Faisons de la même manière,

$$P = \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \ldots\right),$$

$$P' = \sum A \left(\alpha'_1 \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta'_1 \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma'_1 \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \ldots\right).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P^{(n-1)} = \sum A \left(\alpha_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \ldots\right);$$

$$S = \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \ldots\right),$$

$$S' = \sum A \left(\alpha'_1 \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta'_1 \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma'_1 \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S^{(n-1)} = \sum A \left(\alpha_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma_1^{(n-1)} \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \ldots\right).$$

Les n^2 nombres M, N, P,..., M', N', P', etc., jouissent de la propriété énoncée. En effet, on a, en désignant par θ une lettre quelconque de (S),

$$\begin{aligned}
&M\theta + N\theta' + P\theta'' + \ldots + S\theta^{(n-1)} \\
&= \theta \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma} + \ldots\right) \\
&+ \theta' \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta'} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma'} + \ldots\right) \\
&+ \theta'' \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta''} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma''} + \ldots\right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \theta^{(n-1)} \sum A \left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{d\alpha^{(n-1)}} + \beta_1 \frac{d\Delta}{d\beta^{(n-1)}} + \gamma_1 \frac{d\Delta}{d\gamma^{(n-1)}} + \ldots\right).
\end{aligned}$$

Faisant passer les coefficients θ, θ', θ'', etc., dans les parenthèses, il vient

$$\begin{aligned} &M\theta + N\theta' + P\theta'' + \ldots + S\theta^{(n-1)} \\ &= \sum A \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \left(\theta \frac{d\Delta}{d\alpha} + \theta' \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \theta'' \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \ldots\right) \\ + \beta_1 \left(\theta \frac{d\Delta}{d\beta} + \theta' \frac{d\Delta}{d\beta'} + \theta'' \frac{d\Delta}{d\beta''} + \ldots\right) + \ldots \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Mais, d'après l'énoncé,

$$\theta \frac{d\Delta}{d\alpha} + \theta' \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \theta'' \frac{d\Delta}{d\alpha''} + \ldots = \frac{1}{k}\left(\theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \theta'_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \theta''_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \ldots\right),$$

$$\theta \frac{d\Delta}{d\beta} + \theta' \frac{d\Delta}{d\beta'} + \theta'' \frac{d\Delta}{d\beta''} + \ldots = \frac{1}{k}\left(\theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \theta'_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \theta''_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta''_1} + \ldots\right),$$

. . . . . .

$$\theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \theta'_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \ldots, \quad \theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \theta' \frac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \ldots,$$

désignant ce que deviennent les déterminants,

$$\theta \frac{d\Delta}{d\alpha} + \theta' \frac{d\Delta}{d\alpha'} + \ldots, \quad \theta \frac{d\Delta}{d\beta} + \theta' \frac{d\Delta}{d\beta'} + \ldots,$$

lorsque l'on y remplace chaque lettre par la lettre correspondante de (S_1). On a donc

$$\begin{aligned} &M\theta + N\theta' + P\theta'' + \ldots + S\theta^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{k} \sum \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \left(\theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \theta'_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \theta''_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \ldots\right) \\ + \beta_1 \left(\theta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \theta'_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \theta''_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta''_1} + \ldots\right) + \ldots \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &M\theta + N\theta' + P\theta'' + \ldots + S\theta^{(n-1)} \\ &= \frac{\theta_1}{k} \sum \left(\alpha_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \beta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta_1} + \gamma_1 \frac{d\Delta_1}{d\gamma_1} + \ldots\right) \\ &+ \frac{\theta'_1}{k} \sum \left(\alpha_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \beta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta'_1} + \gamma_1 \frac{d\Delta_1}{d\gamma'_1} + \ldots\right) \\ &+ \frac{\theta''_1}{k} \sum \left(\alpha_1 \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \beta_1 \frac{d\Delta_1}{d\beta''_1} + \gamma_1 \frac{d\Delta_1}{d\gamma''_1} + \ldots\right) + \ldots. \end{aligned}$$

D'après les propriétés connues des déterminants, le coefficient de $\frac{\theta_1}{k}$

est égal à $\sum A\Delta_1$, ceux de $\frac{\theta'_1}{k}$, $\frac{\theta''_1}{k}$, etc., sont nuls; donc

$$M\theta + N\theta' + P\theta'' + \ldots + S\theta^{(n-1)} = \frac{\theta_1}{k}\sum A\Delta_1.$$

Mais

$$\frac{\theta_1}{k}\sum A\Delta_1 = \theta_1\sum A\frac{\Delta_1}{k} = \theta_1\sum A\Delta = \theta_1;$$

on a donc, enfin,

$$M\theta + N\theta' + P\theta'' + \ldots + S\theta^{(n-1)} = \theta_1.$$

Les autres équations (1) se démontreraient de la même manière. En se reportant à ces équations, on voit facilement, d'après leur forme, qu'un déterminant quelconque formé avec n colonnes de (S_1) est égal au déterminant composé avec les colonnes correspondantes de (S), multiplié par le déterminant des nombres M, N, P, etc.; ce dernier est donc égal au rapport constant k des deux séries de déterminants : ce qui démontre la seconde partie de l'énoncé.

SUR

LA COMPOSITION DES FORMES QUADRATIQUES A QUATRE VARIABLES;

PAR M. BAZIN,
Ingénieur des Ponts et Chaussées

Si l'on considère deux formes quadratiques, c'est-à-dire deux fonctions homogènes du second degré à coefficients entiers,

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 + \ldots + 2dxy + 2exz + \ldots,$$
$$f' = a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + \ldots + 2d'x'y' + 2e'x'z' + \ldots,$$

on peut se proposer de ramener leur produit à la forme

$$F = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + \ldots + 2DXY + 2EXZ + \ldots,$$

A, B, C, etc., étant des nombres entiers, et X, Y, Z, etc., des fonctions linéaires et entières des produits xx', xy', xz',..., yx', yy', yz', etc. M. Gauss, dans ses *Disquisitiones arithmeticæ*, a complétement résolu ce problème pour le cas de deux variables et lui a donné le nom de *composition*. En étendant à quatre variables la définition posée par M. Gauss pour le cas de deux variables, nous dirons qu'une forme quaternaire

$$F = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DV^2 + 2EXY + 2FXZ + 2GXV$$
$$+ 2HYZ + 2KYV + 2LZV$$

est composée de deux autres formes

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 + 2exy + 2fxz + 2gxv$$
$$+ 2hyz + 2kyv + 2lzv,$$
$$f' = a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + d'v'^2 + 2e'x'y' + 2f'x'z' + 2g'x'v'$$
$$+ 2h'y'z' + 2k'y'v' + 2l'z'v',$$

si elle se transforme en leur produit ff' au moyen de la substitution à coefficients entiers,

$$(\mathrm{S})\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \alpha_1 x'x + \beta_1 x'y + \gamma_1 x'z + \delta_1 x'v + \alpha_2 y'x + \beta_2 y'y \\
&\quad + \gamma_2 y'z + \delta_2 y'v + \alpha_3 z'x + \beta_3 z'y + \gamma_3 z'z + \delta_3 z'v \\
&\quad + \alpha_4 v'x + \beta_4 v'y + \gamma_4 v'z + \delta_4 v'v, \\
\mathrm{Y} &= \alpha'_1 x'x + \beta'_1 x'y + \gamma'_1 x'z + \delta'_1 x'v + \alpha'_2 y'x + \ldots \\
\mathrm{Z} &= \alpha''_1 x'x + \beta''_1 x'y + \gamma''_1 x'z + \delta''_1 x'v + \alpha''_2 y'x + \ldots, \\
\mathrm{V} &= \alpha'''_1 x'x + \beta'''_1 x'y + \gamma'''_1 x'z + \delta'''_1 x'v + \alpha'''_2 y'x + \ldots
\end{aligned}\right.$$

et si, de plus, les déterminants des huit systèmes

$$(\mathrm{S}_1)\quad \left\{\begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1, & \delta'_1 \\ \alpha''_1, & \beta''_1, & \gamma''_1, & \delta''_1 \\ \alpha'''_1, & \beta'''_1, & \gamma'''_1, & \delta'''_1 \end{matrix}\right\}, \qquad (\mathrm{S}_2)\quad \left\{\begin{matrix} \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2 \\ \alpha'_2, & \beta'_2, & \gamma'_2, & \delta'_2 \\ \alpha''_2, & \beta''_2, & \gamma''_2, & \delta''_2 \\ \alpha'''_2, & \beta'''_2, & \gamma'''_2, & \delta'''_2 \end{matrix}\right\},$$

$$(\mathrm{S}_3)\quad \left\{\begin{matrix} \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, & \delta_3 \\ \alpha'_3, & \beta'_3, & \gamma'_3, & \delta'_3 \\ \alpha''_3, & \beta''_3, & \gamma''_3, & \delta''_3 \\ \alpha'''_3, & \beta'''_3, & \gamma'''_3, & \delta'''_3 \end{matrix}\right\}, \qquad (\mathrm{S}_4)\quad \left\{\begin{matrix} \alpha_4, & \beta_4, & \gamma_4, & \delta_4 \\ \alpha'_4, & \beta'_4, & \gamma'_4, & \delta'_4 \\ \alpha''_4, & \beta''_4, & \gamma''_4, & \delta''_4 \\ \alpha'''_4, & \beta'''_4, & \gamma'''_4, & \delta'''_4 \end{matrix}\right\},$$

$$(\mathrm{S}'_1)\quad \left\{\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3, & \alpha'_4 \\ \alpha''_1, & \alpha''_2, & \alpha''_3, & \alpha''_4 \\ \alpha'''_1, & \alpha'''_2, & \alpha'''_3, & \alpha'''_4 \end{matrix}\right\}, \qquad (\mathrm{S}'_2)\quad \left\{\begin{matrix} \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \beta'_1, & \beta'_2, & \beta'_3, & \beta'_4 \\ \beta''_1, & \beta''_2, & \beta''_3, & \beta''_4 \\ \beta'''_1, & \beta'''_2, & \beta'''_3, & \beta'''_4 \end{matrix}\right\},$$

$$(\mathrm{S}'_3)\quad \left\{\begin{matrix} \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \gamma_4 \\ \gamma'_1, & \gamma'_2, & \gamma'_3, & \gamma'_4 \\ \gamma''_1, & \gamma''_2, & \gamma''_3, & \gamma''_4 \\ \gamma'''_1, & \gamma'''_2, & \gamma'''_3, & \gamma'''_4 \end{matrix}\right\}, \qquad (\mathrm{S}'_4)\quad \left\{\begin{matrix} \delta_1, & \delta_2, & \delta_3, & \delta_4 \\ \delta'_1, & \delta'_2, & \delta'_3, & \delta'_4 \\ \delta''_1, & \delta''_2, & \delta''_3, & \delta''_4 \\ \delta'''_1, & \delta'''_2, & \delta'''_3, & \delta'''_4 \end{matrix}\right\},$$

n'ont aucun diviseur commun.

Le théorème d'Euler sur la multiplication de deux sommes de

quatre carrés est un cas particulier de la question précédente. En effet, ce théorème consiste dans l'identité

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2+v^2)(x'^2+y'^2+z'^2+v'^2)\\&=(xx'+yy'+zz'+vv')^2+(yx'-xy'-vz'+zv')^2\\&+(zx'+vy'-xz'-yv')^2+(vx'-zy'+yz'-xv')^2.\end{aligned}$$

En remplaçant, dans cette identité, y, z, v, y', z', v' par $y\sqrt{a}$, $z\sqrt{b}$, $v\sqrt{ab}$, $y'\sqrt{a}$, $z'\sqrt{b}$, $v'\sqrt{ab}$, on obtient la relation plus générale, due à Lagrange,

$$\begin{aligned}&(x^2+ay^2+bz^2+abv^2)(x'^2+ay'^2+bz'^2+abv'^2)\\&=(xx'+ayy'+bzz'+abvv')^2+a(yx'-xy'-bvz'+bzv')^2\\&+b(zx'+avy'-xz'-ayv')^2+ab(vx'-zy'+yz'-xv')^2.\end{aligned}$$

Nous donnerons d'abord la solution algébrique complète du problème de la composition et nous rechercherons ensuite dans quels cas il admet des solutions rationnelles et entières. Ces cas sont assez restreints, comme le démontrent les propositions suivantes, qui se déduisent immédiatement de la solution générale :

1°. Une forme quaternaire n'est composable avec une autre forme quaternaire et même avec une forme quadratique d'un nombre d'indéterminées quelconques que si son déterminant est négatif et, de plus, un carré parfait. Cette condition se vérifie immédiatement sur les formes d'Euler et de Lagrange, dont les déterminants sont -1 et $-a^2b^2$. Dans le cas d'un déterminant positif, les solutions du problème seraient non-seulement irrationnelles, mais imaginaires.

2°. Une forme définie ne peut se composer avec une forme indéfinie.

3°. Il résulte des deux propositions précédentes que deux formes f, f' susceptibles d'être composées peuvent être ramenées par des transformations rationnelles à deux nouvelles formes, telles que

$$\begin{aligned}f_1&=\varphi(x,y,z)+\Delta v^2,\\f'_1&=\varphi'(x',y',z')+\Delta' v'^2,\end{aligned}$$

$\varphi(x, y, z)$, $\varphi'(x', y', z')$ étant deux formes ternaires toutes deux définies ou toutes deux indéfinies, et Δ, Δ' leurs déterminants. Il faut, de plus, pour que la composition soit possible, qu'il existe une transformation rationnelle entre les formes adjointes $\Phi(x, y, z)$, $\Phi'(x', y', z')$ de $\varphi(x, y, z)$, $\varphi'(x', y', z')$. Toutes les inconnues de la question s'expriment en fonction rationnelle des neuf coefficients de cette transformation. La composition de deux formes quaternaires se ramène ainsi en dernière analyse à la recherche d'une transformation entre deux formes ternaires. Cette relation entre deux théories qui semblent n'avoir aucun point de contact est assez remarquable. On déduit des propositions précédentes que les deux formes f et f' et leur composée F peuvent, au moyen de substitutions rationnelles, être ramenées à trois nouvelles formes f_1, f'_1, F_1 qui ne diffèrent que par un seul coefficient,

$$f_1 = ax^2 + \frac{1}{a}(c\,dy^2 + b\,dz^2 + b\,cv^2),$$

$$f'_1 = a'x'^2 + \frac{1}{a'}(c\,dy'^2 + b\,dz'^2 + b\,cv'^2),$$

$$F_1 = aa'X^2 + \frac{1}{aa'}(c\,dY^2 + bdZ^2 + bc\,V^2).$$

4°. On voit déjà, d'après les trois conditions précédentes, combien la composition est restreinte dans les formes quaternaires. Ces trois conditions suffisent pour que le problème admette des solutions rationnelles, mais une quatrième est encore nécessaire pour qu'il y ait des solutions entières. Lorsque l'on se borne au cas le plus simple, c'est-à-dire à celui de la composition avec elle-même d'une forme telle que

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2,$$

cette condition peut s'énoncer ainsi : Soient l le plus grand commun diviseur de ab et de cd, l' le plus grand commun diviseur de ac et de bd, l'' le plus grand commun diviseur de ad et de bc, le produit $ll'l''$ doit être égal à $abcd$. La forme composée est, dans ce cas,

$$X^2 + lY^2 + l'Z^2 + l''V^2.$$

Une forme quaternaire n'est donc pas toujours composable avec elle-même. Cette impossibilité établit une différence importante entre les formes binaires et les formes quaternaires et ne permet pas de faire, pour ces dernières, une classification analogue à celle que M. Gauss a faite dans les n°s 301-307 des *Disquisitiones arithmeticæ*. M. Gauss, en effet, a établi que les formes binaires d'un même déterminant peuvent être considérées comme résultant de la composition d'un nombre très-limité d'entre elles avec les différentes puissances d'une même forme. Nous appelons ici puissance $n^{ième}$ d'une forme f la forme que l'on obtient en composant f avec elle-même n fois de suite. Pour établir dans les formes quaternaires une théorie semblable, il faudrait admettre des substitutions à coefficients fractionnaires; mais la composition ainsi entendue prend une trop grande extension, et toutes les formes composées que l'on peut obtenir au moyen de deux formes f et f' ne sont plus équivalentes; elles appartiennent à plusieurs classes d'un même genre. On ne peut donc plus considérer la composition des classes; il faudrait se borner à la composition des genres, ce qui n'offre aucun intérêt, la nature du genre composé pouvant se déterminer d'avance d'après les caractères des genres qui le composent. Les beaux théorèmes des n°s 301-307 des *Disquisitiones arithmeticæ* n'ont donc pas d'analogues dans la théorie des formes quaternaires.

§ I.

Nous ramènerons la solution du problème général à la recherche des déterminants à seize lettres que l'on peut former en combinant de diverses manières les soixante-quatre coefficients de la substitution (S); nous allons d'abord exposer quelques notations et rappeler quelques propriétés des déterminants dont nous ferons usage.

Nous désignerons par Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 les déterminants des quatre systèmes (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) Considérons en particulier l'un d'eux. Δ_1 par exemple, et supposons que l'on substitue aux quatre lettres α_1, α'_1, α''_1, α'''_1 formant la première ligne verticale du système (S_1) les quatre lettres de la première ligne du système (S_2), α_2, α'_2, α''_2, α'''_2;

nous obtenons ainsi un nouveau système,

$$\begin{array}{l} \alpha_2,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1. \\ \alpha'_2,\ \beta'_1,\ \gamma'_1,\ \delta'_1, \\ \alpha''_2,\ \beta''_1,\ \gamma''_1,\ \delta''_1, \\ \alpha'''_2,\ \beta'''_1,\ \gamma'''_1,\ \delta'''_1, \end{array}$$

dont nous représenterons le déterminant par $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$, la lettre du dénominateur dans le symbole $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ désignant la colonne qui est supprimée dans (S_1), et la lettre du numérateur celle de (S_2) qui lui est substituée; en écrivant successivement les quatre lettres α_2, α'_2, α''_2, α'''_2 à la place des trois autres colonnes de (S_1), on obtient trois nouveaux systèmes dont les déterminants peuvent se représenter par $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)$. Nous donnerons aux déterminants ainsi déduits de Δ_1 le nom de dérivés. Il est clair que chacune des douze colonnes composant les trois systèmes (S_2), (S_3), (S_4) peut être écrite à la place de chacune des quatre colonnes de (S_1); nous aurons donc quarante-huit dérivés de (S_1), et par la même raison quarante-huit dérivés pour chacun des trois déterminants Δ_2, Δ_3, Δ_4. Le nombre des dérivés est ainsi de 48×4 ou 192. Ces cent quatre-vingt-douze quantités peuvent se partager en trois catégories distinctes : 1° les quarante-huit dérivés de Δ_1; 2° quarante-huit dérivés de Δ_2, Δ_3, Δ_4 qui s'obtiennent en substituant une colonne de (S_1) à une des colonnes de (S_2), (S_3), (S_4); 3° quatre-vingt-seize déterminants où ne figurent pas les lettres du système (S_1) et qui s'obtiennent en remplaçant dans l'un des trois systèmes (S_2), (S_3), (S_4) une colonne verticale par une colonne de l'un des deux autres. Les déterminants des deux dernières séries sont liés à ceux de la première par des équations de condition fort simples. Ces relations se déduisent toutes des identités connues :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta_1 \alpha_2 &= \alpha_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \beta_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) + \gamma_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right) + \delta_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right),\\
\Delta_1 \beta_2 &= \alpha_1 \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) + \beta_1 \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) + \gamma_1 \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right) + \delta_1 \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right),\\
\Delta_1 \gamma_2 &= \alpha_1 \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right) + \beta_1 \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right) + \gamma_1 \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) + \delta_1 \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right),\\
\Delta_1 \delta_2 &= \alpha_1 \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right) + \beta_1 \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right) + \gamma_1 \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right) + \delta_1 \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right),\\
\Delta_1 \alpha'_2 &= \alpha'_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \beta'_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) + \gamma'_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right) + \delta'_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_1 \alpha''_2 &= \alpha''_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \beta''_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) + \gamma''_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right) + \delta''_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_1 \alpha'''_2 &= \alpha'''_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \beta'''_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) + \gamma'''_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right) + \delta'''_1 \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

(Ces identités se vérifient facilement en remarquant que l'on a, d'après la définition que nous avons donnée des déterminants dérivés,

$$\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \alpha_2 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \alpha'_2 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \alpha''_2 \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \alpha'''_2 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1},$$

$$\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) = \beta_2 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \beta'_2 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \beta''_2 \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \beta'''_2 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1},$$

$\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1}$, $\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1}$, etc., étant les dérivées de Δ_1 prises par rapport aux différentes lettres qui le composent.)

On a de même :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta_2 \alpha_1 &= \alpha_2 \Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \beta_2 \Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + \gamma_2 \Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right) + \delta_2 \Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right),\\
\Delta_2 \beta_1 &= \alpha_2 \Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) + \beta_2 \Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) + \gamma_2 \Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\gamma_2}\right) + \delta_2 \Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\delta_2}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Éliminant les seize lettres α_1, β_1, γ_1, δ_1, α'_1, β'_1, etc., entre ces deux

systèmes et exprimant que les équations qui résultent de l'élimination ne sont que de simples identités, on obtient les seize relations suivantes entre les dérivés de Δ_1 et ceux des dérivés de Δ_2 qui font partie de la deuxième série,

$$
3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta_1\Delta_2 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right)\\
&\qquad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right),\\
0 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right)\\
&\qquad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right),\\
0 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta^2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right)\\
&\qquad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right),\\
0 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right)\\
&\qquad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
0 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\gamma_2}\right)\\
&\qquad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\delta_2}\right),\\
\Delta_1\Delta_2 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\gamma.}\right)\\
&\qquad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\delta_2}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta_1\Delta_2 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\beta.}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\gamma_2}\right)\\
&\qquad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

En changeant l'indice 2 en 3 ou 4, on poserait deux séries de relations analogues pour les dérivés de Δ_3 et Δ_4.

On obtient de la même manière des relations entre les déterminants de la troisième série et ceux des deux premières; reprenons les équations (1); en changeant l'indice 2 en 3, on a un système analogue,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_1 \alpha_3 &= \alpha_1 \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) + \beta_1 \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right) + \gamma_1 \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right) \\ &\qquad + \delta_1 \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right), \\ \Delta_1 \beta_3 &= \alpha_1 \Delta_1 \left(\frac{\beta_3}{\alpha_1}\right) + \beta_1 \Delta_1 \left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right) + \gamma_1 \Delta_1 \left(\frac{\beta}{\gamma_1}\right) \\ &\qquad + \delta_1 \Delta_1 \left(\frac{\beta}{\delta_1}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En changeant, dans les équations (4), l'indice 1 en 2, on obtient de même,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_2 \alpha_3 &= \alpha_2 \Delta_2 \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) + \beta_2 \Delta_2 \left(\frac{\alpha_3}{\beta_2}\right) + \gamma_2 \Delta_2 \left(\frac{\alpha_3}{\gamma_2}\right) \\ &\qquad + \gamma_2 \Delta_2 \left(\frac{\alpha_3}{\delta_2}\right), \\ \Delta_2 \beta_3 &= \alpha_2 \Delta_2 \left(\frac{\beta_3}{\alpha_2}\right) + \beta_2 \Delta_2 \left(\frac{\beta_3}{\beta_2}\right) + \gamma_2 \Delta_2 \left(\frac{\beta_3}{\gamma_2}\right) \\ &\qquad + \delta_2 \Delta_2 \left(\frac{\beta_3}{\delta_2}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Remplaçons maintenant dans les équations (4), α, β, γ, δ, etc., par leurs valeurs tirées des équations (2), et identifions les expressions ainsi obtenues pour α_3, β_3, etc., avec les expressions (5); nous avons

les seize équations de condition :

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\alpha_2}\right),\\
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\alpha_3}{\beta_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\beta_2}\right),\\
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\gamma_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\gamma_2}\right),\\
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\alpha_3}{\delta_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\delta_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\delta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right),\\
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\alpha_2}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\delta_3}{\delta_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\delta_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\delta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Il résulte de ce qui précède que tous les déterminants dérivés peuvent s'exprimer en fonction de Δ_1, et de ses quarante-huit dérivés; les trois déterminants Δ_2, Δ_3, Δ_4 peuvent eux-mêmes s'exprimer ainsi; car, si l'on se reporte aux valeurs de α_2, β_2, etc., données par les

équations (1), on a, en formant leur déterminant,

$$(7)\quad \Delta_2 = \Delta_1 \times \text{dét. du syst.} \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right) \\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right) \\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right) \\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right) \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant que l'on donne numériquement Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 et leurs dérivés, et proposons-nous d'en déduire les soixante-quatre coefficients (S) : il est clair qu'il suffit de considérer Δ_1 et ses quarante-huit dérivés, pourvu que les équations de condition précédentes soient satisfaites, autrement le problème serait impossible. Nous n'avons donc que quarante-neuf équations qui s'obtiendront en égalant aux valeurs numériques données Δ_1 et ses dérivés. Ces équations peuvent être remplacées par d'autres plus simples. Désignons par $[\Delta_1]$, $\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]$, $\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right]$, etc., les valeurs numériques de Δ_1, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)$, etc.; il est clair que l'on a, d'après les équations (1), quarante-huit relations de la forme suivante :

$$(8)\quad \begin{cases} [\Delta_1]\,\alpha_2 = \alpha_1\,\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right] + \beta_1\,\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right] + \gamma_1\,\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right] + \delta_1\,\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right], \\ [\Delta_1]\,\beta_2 = \alpha_1\,\Delta_1\left[\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right] + \beta_1\,\Delta_1\left[\frac{\beta_2}{\beta_1}\right] + \gamma_1\,\Delta_1\left[\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right] + \delta_1\,\Delta_1\left[\frac{\beta_2}{\delta_1}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on choisit les seize coefficients α_1, β_1, γ_1, δ_1, α'_1, etc., de manière que leur déterminant soit égal à $[\Delta_1]$, les équations (8) donneront les valeurs des quarante-huit autres coefficients α_2, β_2, etc. En effet, on a

$$\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \alpha_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \alpha'_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \alpha''_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \alpha'''_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1}.$$

Remplaçant α_2, α'_2, α''_2, α'''_2 par les expressions (8), il vient

$$[\Delta_1]\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \left\{\alpha_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right] + \beta_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right] + \gamma_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right] + \delta_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right]\right\}\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1}$$
$$+ \left\{\alpha'_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou bien

$$[\Delta_1]\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]\left\{\alpha_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \alpha'_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \ldots\right\}$$
$$+ \Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right]\left\{\beta_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \beta'_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \ldots\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

le coefficient de $\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]$ est égal à $[\Delta_1]$, ceux de $\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right]$, etc., sont évidemment nuls. On a donc bien

$$\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right].$$

Les équations (8) fournissent ainsi la solution complète de la question.

§ II.

Revenons maintenant au problème qui fait l'objet de ce Mémoire

Supposons les deux formes f, f' données, et proposons-nous d'en déduire la forme composée F. Les inconnues sont au nombre de soixante-quatorze, savoir, les dix coefficients de F et les soixante-quatre coefficients de la substitution (S). Les équations qui doivent déterminer toutes ces quantités s'obtiendront en effectuant dans F la substitution (S) et identifiant le résultat avec le produit ff'. Nous avons ainsi cent équations se rapportant à trois types différents. Afin de les écrire sous une forme plus simple, nous désignerons par $\frac{dF}{d\alpha_1}$, $\frac{dF}{d\alpha'_1}$, $\frac{dF}{d\alpha''_1}$, $\frac{dF}{d\alpha'''_1}$ les dérivées par rapport à α_1, α'_1, α''_1, α'''_1 de l'expression

$$A\alpha_1^2 + B\alpha_1'^2 + C\alpha_1''^2 + D\alpha_1'''^2 + 2E\alpha_1\alpha'_1 + \ldots.$$

que l'on obtient en faisant, dans F,

$$X = \alpha_1, \quad Y = \alpha'_1, \quad Z = \alpha''_1, \quad V = \alpha'''_1;$$

nous représenterons par $\sum \alpha_1 \frac{dF}{d\alpha_1}$, $\sum \beta_1 \frac{dF}{d\alpha_1}$, etc., les expressions

$$\alpha_1 \frac{dF}{d\alpha_1} + \alpha'_1 \frac{dF}{d\alpha'_1} + \alpha''_1 \frac{dF}{d\alpha''_1} + \alpha'''_1 \frac{dF}{d\alpha'''_1},$$

$$\beta_1 \frac{dF}{d\alpha_1} + \beta'_1 \frac{dF}{d\alpha'_1} + \beta''_1 \frac{dF}{d\alpha''_1} + \beta'''_1 \frac{dF}{d\alpha'''_1},$$

et par $\sum \beta_1 \frac{dF}{d\beta_1}, \ldots, \sum \gamma_1 \frac{dF}{d\gamma_1}$, etc., des expressions analogues α_1, β_1, γ_1, etc. Nous supposerons, en outre, que f et f' ne contiennent que les carrés des variables, c'est-à-dire que les douze coefficients e, f, g, h, k, l, e', f', g', h', k', l' sont nuls, le cas général pouvant se déduire facilement de ce cas particulier.

A cause de la symétrie des lettres, nous n'écrirons que les seize équations où figure le coefficient α_1, les autres s'en déduisant par de simples permutations de lettres. Ceci posé, ces équations, en se servant de la notation exposée plus haut, s'écriront de la maniere suivante :

Premier type.

$$(9) \qquad \sum \alpha_1 \frac{dF}{d\alpha_1} = 2aa'.$$

Ce type comprend seize équations qui se déduiraient de la précédente en remplaçant α_1 par β_1, γ_1, etc., et aa' par ab', ac', etc.

Deuxième type.

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \beta_1 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0, \\ &\sum \gamma_1 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0, \\ &\sum \delta_1 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \alpha_2 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0, \\ &\sum \alpha_3 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0, \\ &\sum \alpha_4 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0 \end{aligned} \right.$$

Les équations (10) ne contiennent que des lettres de même indice. Pour chacun des quatre indices 1, 2, 3, 4 on aura six équations que l'on formera en combinant deux à deux les quatre lettres α, β, γ, δ. Il y a donc vingt-quatre équations de la forme (10). Les équations (11), au contraire, s'obtiennent en combinant des lettres semblables, mais d'indices différents; elles sont également au nombre de vingt-quatre.

Troisième type

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\sum \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_1} + \sum \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} = 0, & \sum \beta_3 \frac{dF}{d\alpha_1} + \sum \alpha_3 \frac{dF}{d\beta_1} = 0, \\
\sum \beta_4 \frac{dF}{d\alpha_1} + \sum \alpha_4 \frac{dF}{d\beta} = 0, & \\
\sum \gamma_2 \frac{dF}{d\alpha_1} + \sum \alpha_2 \frac{dF}{d\gamma_1} = 0, & \sum \gamma_3 \frac{dF}{d\alpha_1} + \sum \alpha_3 \frac{dF}{d\gamma_1} = 0, \\
\sum \gamma_4 \frac{dF}{d\alpha_1} + \sum \alpha_4 \frac{dF}{d\gamma_1} = 0, & \\
\sum \delta_2 \frac{dF}{d\alpha_1} + \sum \alpha_2 \frac{dF}{d\delta_1} = 0, & \sum \delta_3 \frac{dF}{d\alpha_1} + \sum \alpha_3 \frac{dF}{d\delta_1} = 0, \\
\sum \delta_4 \frac{dF}{d\alpha_1} + \sum \alpha_4 \frac{dF}{d\delta_1} = 0. &
\end{array}\right.$$

La première équation de chacun de ces trois groupes s'obtient en combinant l'une des quatre lettres α_1, β_1, γ_1, δ_1 avec l'une des quatre lettres α_2, β_2, γ_2, δ_2; il y aura donc six équations appartenant à ce type dans lesquelles les indices seront 1 et 2. La même opération peut être répétée pour chacune des six combinaisons des indices 1, 2, 3, 4. Nous aurons donc en tout trente-six équations de la forme (12).

Nous allons commencer par éliminer les dix coefficients de F. Si nous considérons les équations (9) et (10) comme un système d'équations du premier degré dont les inconnues seraient $\frac{dF}{d\alpha_1}$, $\frac{dF}{d\alpha'_1}$, $\frac{dF}{d\alpha''_1}$, $\frac{dF}{d\alpha'''_1}$, nous avons, en résolvant par rapport à ces quantités:

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\frac{dF}{d\alpha_1} = \frac{2aa'}{\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1}, & \frac{dF}{d\alpha'_1} = \frac{2aa'}{\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1}, \\
\frac{dF}{d\alpha''_1} = \frac{2aa'}{\Delta}\frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1}, & \frac{dF}{d\alpha'''_1} = \frac{2aa'}{\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1}.
\end{array}\right.$$

Il est clair que ces quatre équations peuvent remplacer les équations (9) et (10). Si l'on substitue les valeurs précédentes de $\frac{dF}{dx_1}$, etc., dans les équations (11), elles deviennent :

$$\alpha_2 \frac{d\Delta}{dx_1} + \alpha'_2 \frac{d\Delta_1}{dx'_1} + \alpha''_2 \frac{d\Delta_1}{dx''_1} + \alpha'''_2 \frac{d\Delta_1}{dx'''_1} = 0,$$

$$\alpha_3 \frac{d\Delta_1}{dx_1} + \alpha'_3 \frac{d\Delta_1}{dx'_1} + \alpha''_3 \frac{d\Delta_1}{dx''_1} + \alpha'''_3 \frac{d\Delta_1}{dx'''_1} = 0,$$

$$\alpha_4 \frac{d\Delta_1}{dx_1} + \alpha'_4 \frac{d\Delta_1}{dx'_1} + \alpha''_4 \frac{d\Delta_1}{dx''_1} + \alpha'''_4 \frac{d\Delta_1}{dx'''_1} = 0.$$

Les premiers membres représentent les trois déterminants que l'on obtient en remplaçant dans Δ_1 les quatre lettres α_1, α'_1, α''_1, α'''_1 par α_2, α'_2, α''_2, α'''_2 ; α_3, α'_3, α''_3, α'''_3 ; α_4, α'_4, α''_4, α'''_4, on a donc, d'après la notation convenue

$$(14) \qquad \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 0, \quad \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) = 0, \quad \Delta_1\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right) = 0.$$

En faisant la même substitution dans les équations (12), elles deviennent :

$$(15) \quad \left\{\begin{array}{l}
a\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) + b\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) = 0, \\
a\Delta_1\left(\frac{\beta_3}{\alpha_1}\right) + b\Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right) = 0, \\
a\Delta_1\left(\frac{\beta_4}{\alpha_1}\right) + b\Delta_1\left(\frac{\alpha_4}{\beta_1}\right) = 0, \\
\\
a\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right) + c\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right) = 0, \\
a\Delta_1\left(\frac{\gamma_3}{\alpha_1}\right) + c\Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right) = 0, \\
a\Delta_1\left(\frac{\gamma_4}{\alpha_1}\right) + c\Delta_1\left(\frac{\alpha_4}{\gamma_1}\right) = 0, \\
\\
a\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right) + d\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right) = 0, \\
a\Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\alpha_1}\right) + d\Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right) = 0, \\
a\Delta_1\left(\frac{\delta_4}{\alpha_1}\right) + d\Delta_1\left(\frac{\alpha_4}{\delta_1}\right) = 0.
\end{array}\right.$$

Nous avons déduit les équations (13) et (15) des équations prim-

tives du probleme. Il est facile de voir que ces dernières peuvent également se déduire des équations (13) et (15) qui peuvent, par conséquent, les remplacer. Il ne nous reste plus, pour achever l'élimination des coefficients de F, qu'à éliminer ces inconnues entre les équations de la forme (13), qui sont au nombre de soixante-quatre. En effet, en écrivant de nouveau les quatre équations (13) et leur adjoignant douze autres qui s'en déduisent par de simples permutations de lettres, nous avons :

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{dF}{d\alpha_1} = \dfrac{2aa'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha_1}, & \dfrac{dF}{d\beta_1} = \dfrac{2ba'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\beta_1}, \\
\dfrac{dF}{d\gamma_1} = \dfrac{2ca'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\gamma_1}, & \dfrac{dF}{d\delta_1} = \dfrac{2da'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\delta_1}. \\
\dfrac{dF}{d\alpha'_1} = \dfrac{2aa'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha'_1}, & \dfrac{dF}{d\beta'_1} = \dfrac{2ba'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\beta'_1}, \\
\dfrac{dF}{d\gamma'_1} = \dfrac{2ca'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\gamma'_1}, & \dfrac{dF}{d\delta'_1} = \dfrac{2da'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\delta'_1}, \\
\dfrac{dF}{d\alpha''_1} = \dfrac{2aa'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha''_1}, & \dfrac{dF}{d\beta''_1} = \dfrac{2ba'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\beta''_1}, \\
\dfrac{dF}{d\gamma''_1} = \dfrac{2ca'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\gamma''_1}, & \dfrac{dF}{d\delta''_1} = \dfrac{2da'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\delta''_1}, \\
\dfrac{dF}{d\alpha'''_1} = \dfrac{2aa'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1}, & \dfrac{dF}{d\beta'''_1} = \dfrac{2ba'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\beta'''_1}, \\
\dfrac{dF}{d\gamma'''_1} = \dfrac{2ca'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\gamma'''_1}, & \dfrac{dF}{d\delta'''_1} = \dfrac{2da'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\delta'''_1}.
\end{array}\right.$$

En changeant successivement l'indice 1 en 2, 3, 4, nous aurons trois systèmes de seize équations semblables au précédent; c'est entre ces trois derniers systèmes et le système (16) qu'il faut éliminer les coefficients inconnus de la forme composée F. Si l'on examine les équations (16), ou plutôt les équations (9) et (10) dont elles ont été déduites, on voit qu'elles expriment simplement que la substitution

$$S_1\quad \left\{\begin{array}{l}
X = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 v, \\
Y = \alpha'_1 x + \beta'_1 y + \gamma'_1 z + \delta'_1 v, \\
Z = \alpha''_1 x + \beta''_1 y + \gamma''_1 z + \delta''_1 v, \\
V = \alpha'''_1 x + \beta'''_1 y + \gamma'''_1 z + \delta'''_1 v,
\end{array}\right.$$

transforme F en $a'f$; donc, si l'on désigne par $\left(\frac{1}{\sqrt{a'}}\,S_1\right)$ la substitution que l'on déduit de (S_1) en divisant par $\sqrt{a'}$ les coefficients α_1, β_1, etc., cette nouvelle substitution doit transformer F en f. De même, la substitution

$$(S_2)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 v,\\ Y &= \alpha'_2 x + \beta'_2 y + \gamma'_2 z + \delta'_2 v,\\ Z &= \alpha''_2 x + \beta''_2 y + \gamma''_2 z + \delta''_2 v,\\ V &= \alpha'''_2 x + \beta'''_2 y + \gamma'''_2 z + \delta'''_2 v, \end{aligned}\right.$$

transforme F en $b'f$; et, en employant la même notation, on voit que la substitution $\left(\frac{1}{\sqrt{b'}}\,S_2\right)$ transforme F en f. Mais il résulte des équations (1) que l'on a

$$\frac{\alpha}{\sqrt{b'}} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}}$$

$$+ \frac{\gamma_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + \frac{\delta_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)}{\Delta}\sqrt{\frac{a'}{b'}},$$

$$\frac{\beta_2}{\sqrt{b'}} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}}$$

$$+ \frac{\gamma_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + \frac{\delta_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}},$$

. . . . . .

. . . . . .

la substitution $\left(\frac{1}{\sqrt{b'}}\,S_2\right)$ équivaut donc aux deux substitutions suc-

cessives :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a'}}S_1\right)\left\{\begin{aligned}
X &= \frac{\alpha_1}{\sqrt{a'}}x'' + \frac{\beta_1}{\sqrt{a'}}y'' + \frac{\gamma_1}{\sqrt{a'}}z'' + \frac{\delta_1}{\sqrt{a'}}v'',\\
Y &= \frac{\alpha'_1}{\sqrt{a'}}x'' + \frac{\beta'_1}{\sqrt{a'}}y'' + \frac{\gamma'_1}{\sqrt{a'}}z'' + \frac{\delta'_1}{\sqrt{a'}}v'',\\
Z &= \frac{\alpha''_1}{\sqrt{a'}}x'' + \frac{\beta''_1}{\sqrt{a'}}y'' + \frac{\gamma''_1}{\sqrt{a'}}z'' + \frac{\delta''_1}{\sqrt{a'}}v'',\\
V &= \frac{\alpha'''_1}{\sqrt{a'}}x'' + \frac{\beta'''_1}{\sqrt{a'}}y'' + \frac{\gamma'''_1}{\sqrt{a'}}z'' + \frac{\delta'''_1}{\sqrt{a'}}v'',
\end{aligned}\right.$$

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}
x'' &= x\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + y\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + z\frac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + v\frac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}},\\
y'' &= x\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + y\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + z\frac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + v\frac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}},\\
z'' &= x\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + y\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + z\frac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + v\frac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}},\\
v'' &= x\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + y\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)}{\Delta}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + z\frac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + v\frac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}}
\end{aligned}\right.$$

[car en substituant les valeurs de x'', y'', z'', v'' en fonction de x, y, etc., dans les expressions de X, Y, etc., on retrouve la substitution $\left(\frac{1}{\sqrt{b'}}S_2^{-1}\right)$]. Mais la substitution $\left(\frac{1}{\sqrt{a'}}S_1\right)$ transforme F en f ; la substitution (17) est donc une simple transformation de f en elle-même. Réciproquement, si cette condition est satisfaite, il est facile de voir que la substitution (S_2) transformera F en $b'f$. Effectuant dans f la substitution (17), et identifiant le résultat avec f elle-même, nous obtenons dix équations qui remplaceront celles des équations (16) où figurent les coefficients de (S_2) ; ces équations sont, en remarquant que les quatre déterminants $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta}\right)$ sont

nuls,

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
&b\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)^2 + c\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)^2 + d\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)^2 = \frac{b'}{a'}a\Delta_1^2,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)^2 + c\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)^2 + d\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)^2 = \frac{b'}{a'}b\Delta_1^2,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)^2 + b\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)^2 + d\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)^2 = \frac{b'}{a'}c\Delta_1^2,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)^2 + b\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)^2 + c\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right)^2 = \frac{b'}{a'}d\Delta_1^2;\\
&c\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right) + d\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right) = 0,\\
&b\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right) + d\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right) = 0,\\
&b\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right) + c\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right) = 0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right) + d\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right) = 0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right) + c\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right) = 0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right) + b\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

En considérant les substitutions (S_3) et (S_4), nous aurions deux systèmes analogues qui pourraient remplacer celles des équations (13) où figurent les lettres de ces deux substitutions.

L'élimination des coefficients de F se trouve ainsi complète, et nous avons, pour déterminer les inconnues de la question :

1°. Les seize équations (16) où entrent les lettres de (S_1); ces seize équations se réduisent à dix équations distinctes et serviront à déterminer les dix coefficients de F lorsque ceux de la substitution (S) seront connus;

2°. Trois systèmes de dix équations analogues au système (18), vingt-quatre équations de la forme (14) et trente-six autres de la forme (15). Toutes ces équations ne contiennent que les déterminants dérivés de Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.

La question se trouve ainsi ramenée à la recherche de ces déterminants.

§ III.

D'après ce que nous avons vu précédemment, il suffit de trouver les quarante-huit déterminants dérivés de Δ_1. Douze d'entre eux sont déjà connus par les équations (14), ce sont les déterminants :

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{lll} \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right), \\ \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\beta_4}{\beta_1}\right), \\ \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\gamma_4}{\gamma_1}\right), \\ \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\delta_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\delta_4}{\delta_1}\right), \end{array}\right.$$

qui sont tous égaux à zéro. Nous substituerons aux autres, douze inconnues auxiliaires dont l'introduction simplifiera les calculs. Reprenons l'équation

$$(20)\qquad \sum \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} + \sum \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0 :$$

il est facile de voir que l'on a

$$\sum \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} = \sum \beta_1 \frac{dF}{d\alpha_2} \quad \text{et} \quad \sum \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_1} = \sum \alpha_1 \frac{dF}{d\beta_2} :$$

d'où résulte que l'équation (20) peut s'écrire à volonté sous l'une des quatre formes :

$$\sum \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} + \sum \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0, \quad \sum \alpha_1 \frac{dF}{d\beta_2} + \sum \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} = 0,$$
$$\sum \beta_1 \frac{dF}{d\alpha_2} + \sum \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} = 0, \quad \sum \beta_1 \frac{dF}{d\alpha_2} + \sum \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0.$$

Substituant dans ces relations, à la place de $\frac{dF}{d\alpha}, \frac{dF}{d\alpha'_1}, \ldots, \frac{dF}{d\beta_1}, \frac{dF}{d\beta'_1}$, etc., leurs valeurs tirées des équations (16), elles deviennent :

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{ll} b\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) + a\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) = 0, & b'\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + a'\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) = 0, \\ b\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + a\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) = 0, & b'\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) + a'\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) = 0. \end{array}\right.$$

On déduit de ces équations la relation fort simple

$$(22)\qquad \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) = \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right).$$

Posons

$$(23)\qquad \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) = \Delta_1\Delta_2(\alpha\beta)_{1\cdot 2},$$

$(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$ désignant une inconnue auxiliaire; nous avons de même,

$$\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) = \Delta_1\Delta_2(\alpha\beta)_{1\cdot 2}.$$

En résolvant les équations (21) et (23) par rapport aux déterminants dérivés, il vient

$$(24)\qquad \begin{cases} \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) = \Delta_1(\alpha\beta)_{1\cdot 2}\sqrt{\frac{b'b}{a'a}}, & \Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) = -\Delta_2(\alpha\beta)_{1\cdot 2}\sqrt{\frac{a'b}{b'a}}, \\ \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) = -\Delta_1(\alpha\beta)_{1\cdot 2}\sqrt{\frac{b'a}{a'b}}, & \Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) = \Delta_2(\alpha\beta)_{1\cdot 2}\sqrt{\frac{a'a}{b'b}}, \end{cases}$$

la quantité $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$ pouvant être précédée du signe + ou du signe −.

Nous pourrons de même exprimer les autres dérivés de Δ_1, $\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)$: $\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)$: $\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$, etc., en fonction de nouvelles indéterminées analogues $(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\delta)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\beta)_{1\cdot 3}$, etc. La question se trouve ainsi ramenée à la recherche de ces inconnues auxiliaires qui sont au nombre de dix-huit, savoir :

$$(25)\qquad \begin{cases} (\alpha\beta)_{1\cdot 2}, & (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}, & (\alpha\delta)_{1\cdot 2}, & (\beta\gamma)_{1\cdot 2}, & (\beta\delta)_{1\cdot 2}, & (\gamma\delta)_{1\cdot 2}. \\ (\alpha\beta)_{1\cdot 3}, & (\alpha\gamma)_{1\cdot 3}, & (\alpha\delta)_{1\cdot 3}, & (\beta\gamma)_{1\cdot 3}, & (\beta\delta)_{1\cdot 3}, & (\gamma\delta)_{1\cdot 3}. \\ (\alpha\beta)_{1\cdot 4}, & (\alpha\gamma)_{1\cdot 4}, & (\alpha\delta)_{1\cdot 4}, & (\beta\gamma)_{1\cdot 4}, & (\beta\delta)_{1\cdot 4}, & (\gamma\delta)_{1\cdot 4}. \end{cases}$$

Ces dix-huit quantités sont liées par un grand nombre d'équations de condition que nous allons énumérer successivement. Nous distinguerons, comme nous l'avons fait plus haut, trois séries de déterminants : 1° les dérivés de Δ_1; 2° les dérivés de Δ_2, Δ_3, Δ_4 qui s'obtiennent en substituant dans l'un des systèmes (S_2), (S_3), (S_4) une colonne de (S_1); 3° les dérivés de Δ_2, Δ_3, Δ_4 qui ne contiennent aucune des lettres

de (S_1). Chacune de ces trois séries nous fournira un certain nombre d'équations de condition auxquelles doivent satisfaire les dix-huit inconnues auxiliaires. Considérons d'abord les déterminants dérivés de Δ_1; ces déterminants figurent dans trois systèmes d'équations, qui sont : 1° douze équations de la forme (14) : nous n'avons pas à nous en occuper, puisqu'elles donnent les valeurs des déterminants, tels que $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$, etc., qui ne s'expriment pas en fonction des inconnues auxiliaires; 2° dix-huit équations de la forme (15) dont il est également inutile de nous occuper, puisque ce sont elles qui nous ont fourni les valeurs des déterminants en fonction de $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, etc.; 3° enfin, les équations (18). En substituant dans ces dernières les valeurs des déterminants en fonction de $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}$, etc., elles deviennent :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}^2 + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}^2 + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}^2 = 1,\\
&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}^2 + (\beta\gamma)_{1\cdot 2}^2 + (\beta\delta)_{1\cdot 2}^2 = 1,\\
&(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}^2 + (\beta\gamma)_{1\cdot 2}^2 + (\gamma\delta)_{1\cdot 2}^2 = 1,\\
&(\alpha\delta)_{1\cdot 2}^2 + (\beta\delta)_{1\cdot 2}^2 + (\gamma\delta)_{1\cdot 2}^2 = 1;\\
&(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\beta\gamma)_{1\cdot 2} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\beta\delta)_{1\cdot 2} = 0,\\
&-(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\beta\gamma)_{1\cdot 2} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 2} = 0.\\
&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\beta\delta)_{1\cdot 2} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 2} = 0,\\
&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 2} + (\beta\delta)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 2} = 0,\\
&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 2} - (\beta\gamma)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 2} = 0.\\
&(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 2} + (\beta\gamma)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 2} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Ces dix équations se réduisent aux quatre suivantes :

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}^2 + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}^2 + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}^2 = 1,\\
&(\gamma\delta)_{1\cdot 2} = \varepsilon_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 2},\quad (\beta\delta)_{1\cdot 2} = -\varepsilon_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 2},\quad (\beta\gamma)_{1\cdot 2} = \varepsilon_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 2},
\end{aligned}\right.$$

$\varepsilon_{1\cdot 2}$ désignant la quantité ± 1. De même,

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\alpha\beta)_{1\cdot 3}^2 + (\alpha\gamma)_{1\cdot 3}^2 + (\alpha\delta)_{1\cdot 3}^2 = 1,\\
&(\gamma\delta)_{1\cdot 3} = \varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\beta)_{1\cdot 3},\quad (\beta\delta)_{1\cdot 3} = -\varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3},\quad (\beta\gamma)_{1\cdot 3} = \varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\delta)_{1\cdot 3},\\
&(\alpha\beta)_{1\cdot 4}^2 + (\alpha\gamma)_{1\cdot 4}^2 + (\alpha\delta)_{1\cdot 4}^2 = 1,\\
&(\gamma\delta)_{1\cdot 4} = \varepsilon_{1\cdot 4}(\alpha\beta)_{1\cdot 4},\quad (\beta\delta)_{1\cdot 4} = -\varepsilon_{1\cdot 4}(\alpha\gamma)_{1\cdot 4},\quad (\beta\gamma)_{1\cdot 4} = \varepsilon_{1\cdot 4}(\alpha\delta)_{1\cdot 4}.
\end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant les déterminants de la deuxième série, c'est-à-dire ceux qui s'obtiennent en substituant à une colonne de l'un des trois systèmes (S_2), (S_3), (S_4) une colonne de (S_1). Ils sont liés à ceux de la première série par les équations (3). Si nous remplaçons dans ces équations les déterminants par leurs valeurs en fonction de $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, etc., nous retrouvons simplement les équations (26); il n'en résulte donc aucune condition nouvelle.

Il ne nous reste plus à nous occuper que des déterminants de la troisième série; les équations où figurent ces déterminants sont au nombre de trente, savoir, douze équations de la forme (14) et dix-huit équations de la forme (15). Nous avons vu plus haut que ces déterminants s'expriment en fonction de ceux des deux premières séries à l'aide des équations (6); nous avons donc leurs valeurs en fonction de $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, etc., et nous pouvons, en les substituant dans les équations (14) et (15), obtenir de nouvelles conditions pour les dix-huit inconnues $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, etc. Effectuons d'abord cette substitution dans les équations (14), qui sont :

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{llll} \Delta_2\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\frac{\beta_3}{\beta_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\frac{\delta_3}{\delta_2}\right)=0, \\ \Delta_2\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\frac{\beta_4}{\beta_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\frac{\gamma_4}{\gamma_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\frac{\delta_4}{\delta_2}\right)=0, \\ \Delta_3\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\right)=0, & \Delta_3\left(\frac{\beta_4}{\beta_3}\right)=0, & \Delta_3\left(\frac{\gamma_4}{\gamma_3}\right)=0, & \Delta_3\left(\frac{\delta_4}{\delta_3}\right)=0. \end{array}\right.$$

A cause de la symétrie des lettres, il suffira d'effectuer la substitution dans celles de la première ligne; on obtient de cette manière :

$$(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3}+(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3}+(\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3}=0,$$

$$(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3}+(\beta\gamma)_{1\cdot 2}(\beta\gamma)_{1\cdot 3}+(\beta\delta)_{1\cdot 2}(\beta\delta)_{1\cdot 3}=0,$$

$$(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3}+(\beta\gamma)_{1\cdot 2}(\beta\gamma)_{1\cdot 3}+(\gamma\delta)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 3}=0,$$

$$(\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3}+(\beta\delta)_{1\cdot 2}(\beta\delta)_{1\cdot 3}+(\gamma\delta)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 3}=0.$$

Mais en ayant égard aux équations (27) et (28), ces relations devien-

nent :

$$(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3} = 0,$$

$$\varepsilon_{1\cdot 2}\varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3} = 0,$$

$$(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3} + \varepsilon_{1\cdot 2}\varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3} = 0,$$

$$(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3} + \varepsilon_{1\cdot 2}\varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3} = 0.$$

D'où résulte que

$$\varepsilon_{1\cdot 2} = \varepsilon_{1\cdot 3},$$

et que ces quatre équations se réduisent simplement à la premiere d'entre elles. En faisant les mèmes transformations sur les autres équations (29), on n'obtiendra donc en tout que trois relations nouvelles entre les inconnues $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}$, etc.,

$$30 \quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3} = 0,\\ &(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 4} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 4} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 4} = 0,\\ &(\alpha\beta)_{1\cdot 3}(\alpha\beta)_{1\cdot 4} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 3}(\alpha\gamma)_{1\cdot 4} + (\alpha\delta)_{1\cdot 3}(\alpha\delta)_{1\cdot 4} = 0, \end{aligned} \right.$$

auxquelles il faut ajouter la condition

$$\varepsilon_{1\cdot 2} = \varepsilon_{1\cdot 3} = \varepsilon_{1\cdot 4}.$$

Nous désignerons par ε la valeur commune de ces trois quantités.

Si l'on effectue maintenant les mèmes substitutions dans les dix-huit équations de la forme (15), elles se réduisent à de simples identités, en sorte qu'il n'en résulte aucune condition nouvelle.

En résumant tout ce qui précede, on voit que les déterminants dérivés seront tous connus, dès que l'on aura obtenu les neuf quantités $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\delta)_{1\cdot 2}$; $(\alpha\beta)_{1\cdot 3}$, $(\alpha\gamma)_{1\cdot 3}$, $(\alpha\delta)_{1\cdot 3}$; $(\alpha\beta)_{1\cdot 4}$, $(\alpha\gamma)_{1\cdot 4}$, $(\alpha\delta)_{1\cdot 4}$; désignons-les, pour abréger, par λ, λ', λ''; μ, μ', μ''; ν, ν', ν''. Les équations qui les déterminent sont au nombre de six seulement :

$$31 \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 = 1,\\ &\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2 = 1,\\ &\nu^2 + \nu'^2 + \nu''^2 = 1;\\ &\lambda\mu + \lambda'\mu' + \lambda''\mu'' = 0,\\ &\lambda\nu + \lambda'\nu' + \lambda''\nu'' = 0,\\ &\mu\nu + \mu'\nu' + \mu''\nu'' = 0. \end{aligned} \right.$$

Il nous reste encore à trouver Δ_1; nous remarquerons que la substitution (S_1) transforme F en $a'f$, et que l'on doit avoir, en désignant par D_1 et D les déterminants de F et de f,

$$Da'^4 = D_1 \Delta_1^2;$$

posons

$$\frac{D_1}{D} = n^2,$$

il vient

$$\Delta_1 = \pm na'^2,$$

la quantité n restant d'ailleurs tout à fait indéterminée. De même,

$$\Delta_2 = \pm nb'^2, \quad \Delta_3 = \pm nc'^2 \quad \Delta_4 = \pm nd'^2,$$

les signes supérieurs doivent être pris ensemble ainsi que les signes inférieurs, en vertu des équations (7).

Tous les déterminants sont donc connus; les soixante-quatre coefficients de la substitution (S) s'en déduisent facilement, comme on l'a vu plus haut, et la solution algébrique du problème sera complète dès que l'on aura obtenu les dix coefficients de F. Revenons aux équations (16); elles expriment que la substitution (S_1) transforme F en $a'f$. On obtiendra donc F en faisant dans $a'f$ la substitution inverse :

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1}X + \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1}Y + \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1}Z + \frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1}V\right),\\ y &= \frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{d\Delta_1}{d\beta_1}X + \frac{d\Delta}{d\beta'_1}Y + \frac{d\Delta_1}{d\beta''_1}Z + \frac{d\Delta_1}{d\beta'''_1}V\right),\\ z &= \frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{d\Delta_1}{d\gamma_1}X + \frac{d\Delta_1}{d\gamma'_1}Y + \frac{d\Delta_1}{d\gamma''_1}Z + \frac{d\Delta_1}{d\gamma'''_1}V\right),\\ v &= \frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{d\Delta_1}{d\delta_1}X + \frac{d\Delta_1}{d\delta'_1}Y + \frac{d\Delta_1}{d\delta''_1}Z + \frac{d\Delta_1}{d\delta'''_1}V\right),\end{aligned}\right.$$

que l'on trouve facilement en résolvant par rapport à x, y, z, v les équations

$$(S_1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 v,\\ Y &= \alpha'_1 x + \beta'_1 y + \gamma'_1 z + \delta'_1 v,\\ Z &= \alpha''_1 x + \beta''_1 y + \gamma''_1 z + \delta''_1 v,\\ V &= \alpha'''_1 x + \beta'''_1 y + \gamma'''_1 z + \delta'''_1 v,\end{aligned}\right.$$

α_1, β_1, et, par suite, $\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1}$, $\frac{d\Delta_1}{d\beta_1}$, etc., sont connus. On obtient donc immédiatement A, B, C, etc., et la solution algébrique du problème se trouve ainsi complète.

Remarquons, en passant, qu'il existe, entre toutes les formes composées que l'on peut obtenir, des transformations rationnelles; car ces formes se déduisent toutes de $a'f$ par des substitutions rationnelles.

§ IV.

Nous allons rechercher maintenant les conditions qui doivent être remplies pour que les valeurs des inconnues soient rationnelles et entières. Revenons aux dérivés de Δ_1, et considérons spécialement ceux qui s'obtiennent en introduisant dans le système (S_1) une colonne du système (S_2). En ayant égard aux équations (27), les valeurs de ces seize déterminants sont :

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}=0, & \dfrac{\Delta\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}=-\lambda\sqrt{\dfrac{b'a}{a'b}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta}=-\lambda'\sqrt{\dfrac{b'a}{a'c}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}=-\lambda'\sqrt{\dfrac{b'a}{a'd}}. \\[2ex]
\dfrac{\Delta\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta}=\lambda\sqrt{\dfrac{b'b}{a'a}}, & \dfrac{\Delta\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\Delta}=0, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta}=-\varepsilon\lambda''\sqrt{\dfrac{b'b}{a'c}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}=\varepsilon\lambda'\sqrt{\dfrac{b'b}{a'd}}, \\[2ex]
\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta}=\lambda'\sqrt{\dfrac{b'c}{a'a}}, & \dfrac{\Delta\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)}{\Delta}=\varepsilon\lambda''\sqrt{\dfrac{b'c}{a'b}}. & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}=0, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}=-\varepsilon\lambda\sqrt{\dfrac{b'c}{a'd}}, \\[2ex]
\dfrac{\Delta\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}=\lambda''\sqrt{\dfrac{b'd}{a'a}}. & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)}{\Delta}=-\varepsilon\lambda'\sqrt{\dfrac{b'd}{a'b}}. & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}=\varepsilon\lambda\sqrt{\dfrac{b'd}{a'c}}. & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}=0.
\end{array}\right.$$

Si l'on prend le rapport des deux déterminants $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)$ et $\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)$, on a

$$\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)}{\Delta\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)}=\varepsilon\sqrt{\frac{ad}{bc}}.$$

Le second membre de cette équation doit être une quantité rationnelle k; on doit donc avoir

$$ad = bck^2,$$

d'où

$$D = -abcd = -b^2c^2k^2.$$

Nous obtenons ainsi une première condition : le déterminant de f doit être négatif, et, de plus, un carré parfait; il est évident qu'il en est de même du déterminant de l'autre forme. Il résulte de cette condition que l'on a

$$a = bcdm^2, \quad a' = b'c'd'm'^2,$$

m et m' étant rationnels, et que, si l'on fait dans f et f'

$$x = mx_1, \quad x' = m'x'_1,$$

elles deviennent

$$bcdx_1^2 + by^2 + cz^2 + dv^2, \quad b'c'd'x_1'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + d'v'^2.$$

La conclusion précédente est indépendante des signes de a, b, c, d, a', b', c', d'.

Examinons maintenant s'il existe également une condition relative aux signes de ces quantités. Nous distinguerons trois cas :

1°. f et f' sont définies. Dans ce cas, les huit coefficients a, b, c, d, a', b', c', d' sont tous de même signe; les radicaux qui entrent dans les expressions (33) sont tous réels; il en est de même de λ, λ', λ''.

2°. f est définie, f' est indéfinie. Dans cette nouvelle hypothèse, les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$ sont tous positifs. Mais, parmi les quatre coefficients de f', deux doivent être négatifs; nous pouvons supposer que ces deux coefficients sont b' et c', a' et d' étant, au contraire, positifs : le rapport $\frac{b'}{a'}$ est donc négatif, et, par suite, tous les radicaux (33) deviennent imaginaires. Les déterminants dérivés ne seront réels que si les quantités λ, λ', λ'' sont également imaginaires; mais cette der-

nière condition ne peut être remplie, puisque

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 = 1.$$

La composition de deux formes de nature différente est donc impossible.

3°. f et f' sont toutes deux indéfinies. En raisonnant comme précédemment sur les expressions (23), on ne découvre dans ce cas aucune raison d'impossibilité. Nous verrons plus loin qu'en effet deux formes indéfinies peuvent être composées.

Désignons par P, P′, P″ les trois déterminants $\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)$, et par M^2 le produit $abcd$; le système des seize déterminants (33) peut s'écrire :

$$(34)\quad \left|\begin{array}{llll} 0, & -\frac{a}{b}P, & -\frac{a}{c}P', & -\frac{a}{d}P'', \\ P, & 0, & -\varepsilon\frac{ab}{M}P'', & \varepsilon\frac{ab}{M}P', \\ P', & \varepsilon\frac{ac}{M}P'', & 0, & -\varepsilon\frac{ac}{M}P, \\ P'', & -\varepsilon\frac{ad}{M}P', & \varepsilon\frac{ad}{M}P, & 0. \end{array}\right.$$

Tous les déterminants seront rationnels dès que P, P′, P″ le seront. Faisons, de même,

$$\Delta_1\left(\frac{\beta_3}{\alpha_1}\right) = Q,\quad \Delta_1\left(\frac{\gamma_3}{\alpha_1}\right) = Q',\quad \Delta_1\left(\frac{\delta}{\alpha_1}\right) = Q'',$$

$$\Delta_1\left(\frac{\beta_4}{\alpha_1}\right) = R,\quad \Delta_1\left(\frac{\gamma_4}{\alpha_1}\right) = R',\quad \Delta_1\left(\frac{\delta_4}{\alpha_1}\right) = R'';$$

il suffira de trouver pour les neuf quantités P, P′, P″, Q, Q′, Q″, R, R′, R″ et pour Δ_1 des valeurs rationnelles. Nous commencerons par Δ_1. Nous avons vu plus haut que l'on a

$$(35)\quad \Delta_1 = \pm na'^2,\quad \Delta_2 = \pm nb'^2,\quad \Delta_3 = \pm nc'^2,\quad \Delta_4 = \pm nd'^2,$$

n représentant le rapport $\sqrt{\frac{D}{D_1}}$; on pourrait poser, de même,

$$(36)\quad \Delta'_1 = \pm n' a^2, \quad \Delta'_2 = \pm n' b^2, \quad \Delta'_3 = \pm n' c^2, \quad \Delta'_4 = \pm n' d^2,$$

Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4 étant les déterminants des quatre systèmes (S'_1), (S'_2), (S'_3), (S'_4), et n' le rapport $\sqrt{\frac{D'}{D_1}}$, dans lequel D' représente le déterminant de f'.

Soient m le plus grand commun diviseur de a, b, c, d; m' celui de a', b', c', d'; k celui des huit déterminants Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4 : on pourra toujours trouver huit entiers M_1, M_2, M_3, M_4, M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, tels que l'on ait

$$M_1 a'^4 + M_2 b'^4 + M_3 c'^4 + M_4 d'^4 = m'^4,$$
$$M'_1 a^4 + M'_2 b^4 + M'_3 c^4 + M'_4 d^4 = m^4.$$

Multipliant la première de ces deux équations par n^2 et la seconde par n'^2, on a

$$M_1 \Delta_1^2 + M_2 \Delta_2^2 + M_3 \Delta_3^2 + M_4 \Delta_4^2 = n^2 m'^4,$$
$$M'_1 \Delta'^2_1 + M'_2 \Delta'^2_2 + M'_3 \Delta'^2_3 + M'_4 \Delta'^2_4 = n'^2 m^4,$$

d'où l'on conclut que $n^2 m'^4$ et $n'^2 m^4$ doivent être entiers et divisibles par k^2; par suite, $D_1 n^2 m'^4$ et $D_1 n'^2 m^4$, c'est-à-dire $D m'^4$ et $D' m^4$, seront divisibles par $D_1 k^2$. Réciproquement, il est facile de voir, à l'aide des équations (35) et (36), que tout nombre qui divise $n^2 m'^4$ et $n'^2 m^4$ divise k^2, ou, ce qui revient au même, que tout nombre qui divise $D_1 n^2 m'^4$ et $D_1 n'^2 m^4$, c'est-à-dire $D m'^4$ et $D' m^4$, divise $D_1 k^2$. Donc, enfin, $D_1 k^2$ est le plus grand commun diviseur de $D m'^4$ et $D' m^4$.

Faisons

$$\frac{D' m^4}{D_1 k^2} = S'^2, \quad \frac{D m'^4}{D_1 k^2} = S^2,$$

S et S' seront des entiers. Nous aurons

$$mn' = kS', \quad m'n = kS,$$

de sorte qu'en prenant pour $D_1 k^2$ le plus grand commun diviseur de $D m'^4$ et de $D' m^4$, $m'n$ et mn', et, par suite, les déterminants Δ_1, Δ_2, etc., seront entiers. On ne peut prendre pour k qu'un nombre de

valeurs limité. Chacune de ces valeurs correspondra à une forme transformable en ff' au moyen d'une certaine substitution (S). Pour la forme composée proprement dite, on doit avoir, d'après la définition, $k = 1$; elle est donc, de toutes les formes transformables en ff', celle qui a le plus grand déterminant.

Les déterminants Δ_1, Δ_2, etc., varient proportionnellement à k : il est facile d'en conclure, en se reportant au théorème démontré au commencement de ce Mémoire et aux équations (32), que toutes les formes ransformables en ff' comprennent la forme composée; on en conclut également que toutes les formes répondant à une même valeur de k sont équivalentes.

Revenons maintenant aux inconnues P, P′, P″, etc., en fonction desquelles s'expriment toutes celles de la question. On a vu plus haut que $\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)$ ou P est égal à $\lambda\Delta_1\sqrt{\frac{b'b}{a'a}}$; on a donc

$$\lambda = \frac{P}{\Delta_1}\sqrt{\frac{aa'}{b'b}} = \frac{P}{na'^2}\sqrt{\frac{aa'}{b'b}},$$

λ', λ'', μ, μ', μ'', ν, ν', ν'' s'exprimeraient de la même manière en fonction de P′, P″, Q, Q′, Q″, R, R′, R″. En substituant ces valeurs dans les équations (31), elles deviennent

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned}
&cd\,P^2 + bd\,P'^2 + bc\,P''^2 = n^2 a'^3 b' \cdot \frac{bcd}{a},\\
&cd\,Q^2 + bd\,Q'^2 + bc\,Q''^2 = n^2 a'^3 c' \cdot \frac{bcd}{a},\\
&cd\,R^2 + bd\,R'^2 + bc\,R''^2 = n^2 a'^3 d' \cdot \frac{bcd}{a};\\
&cd\,PQ + bd\,P'Q' + bc\,P''Q'' = 0,\\
&cd\,PR + bd\,P'R' + bc\,P''R'' = 0,\\
&cd\,QR + bc\,Q'R' + bc\,Q''R'' = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on considère les seconds membres de ces équations, on peut poser

$$n^2 a'^3 b' \cdot \frac{bcd}{a} = n^2 a'^3 b' \frac{M^2}{a^2} = \frac{n^2 a'^2 M'^2 M^2}{a^2 c'^2 d'^2} c' d' = M_1^2 c' d',$$

$$n^2 a'^3 c' \cdot \frac{bcd}{a} = n^2 a'^3 c' \frac{M^2}{a^2} = \frac{n^2 a'^2 M^2 M'^2}{a^2 b'^2 d'^2} b' d' = M_2^2 b' d',$$

$$n^2 a'^3 d' \cdot \frac{bcd}{a} = n^2 a'^3 d' \frac{M^2}{a^2} = \frac{n^2 a'^2 M^2 M'^2}{a^2 b'^2 c'^2} b' c' = M_3^2 b' c'.$$

Donc, en faisant

$$\begin{aligned} P &= M_1 P_1, & P' &= M_1 P'_1, & P'' &= M_1 P''_1, \\ Q &= M_2 Q_1, & Q' &= M_2 Q'_1, & Q'' &= M_2 Q''_1, \\ R &= M_3 R_1, & R' &= M_3 R'_1, & R'' &= M_3 R''_1, \end{aligned}$$

les équations (37) deviennent

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} & cdP_1^2 + bdP_1'^2 + bcP_1''^2 = c'd', \\ & cdQ_1^2 + bdQ_1'^2 + bcQ_1''^2 = b'd', \\ & cdR_1^2 + bdR_1'^2 + bcR_1''^2 = b'c', \\ & cdP_1Q_1 + bdP'_1Q'_1 + bcP''_1Q''_1 = 0, \\ & cdP_1R_1 + bdP'_1R'_1 + bcP''_1R''_1 = 0, \\ & cdQ_1R_1 + bdQ'_1R'_1 + bcQ''_1R''_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Le problème se trouve ainsi ramené à déterminer ces neuf quantités en nombres rationnels, de manière que la substitution

$$\begin{aligned} x &= P_1 x' + Q_1 y' + R_1 z', \\ y &= P'_1 x' + Q'_1 y' + R'_1 z', \\ z &= P''_1 x' + Q''_1 y' + R''_1 z', \end{aligned}$$

transforme la forme ternaire

$$cdx^2 + bdy^2 + bcz^2$$

en

$$c'd'x'^2 + b'd'y'^2 + b'c'z'^2.$$

Il n'y aura de solutions rationnelles que s'il existe entre ces deux formes une transformation rationnelle; et si cette condition est remplie, on sera certain qu'il existe des solutions de cette espèce.

La composition des formes quaternaires se réduit donc, en dernière analyse, à la recherche d'une transformation entre les deux formes ternaires

$$cdx^2 + bdy^2 + bcz^2$$

et

$$c'd'x'^2 + b'd'y'^2 + b'c'z'^2.$$

Si les conditions auxquelles nous sommes arrivés jusqu'à présent sont remplies, le problème admettra des solutions rationnelles; mais elles ne seront pas toujours entières, et même il n'y aura de solutions entières que dans des cas assez particuliers. Nous allons d'abord constater ce fait important, qui distingue complétement les formes quaternaires des formes binaires, dans la composition d'une forme définie avec elle-même. Dans ce cas, on a

$$n = n' = 1;$$

les deux formes ternaires

$$cdx^2 + bdy^2 + bcz^2, \quad c'd'x'^2 + b'd'y'^2 + b'd'z'^2$$

deviennent identiques, et, comme elles sont définies, il n'existe entre elles d'autre transformation que la suivante.

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, & Q_1 &= 0, & R_1 &= 0, \\ P'_1 &= 0, & Q'_1 &= 1, & R'_1 &= 0, \\ P''_1 &= 0, & Q''_1 &= 0, & R''_1 &= 1, \end{aligned}$$

ou, du moins, les autres transformations s'en déduiraient par de simples permutations entre les coefficients. Substituons les valeurs des déterminants qui se déduisent de ces neuf coefficients dans les équations (1), afin d'obtenir les coefficients (S); ces équations deviennent :

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha_2 = -\beta_1, & \alpha_3 = -\gamma_1, & \alpha_4 = -\delta_1, \\ \beta_2 = \frac{b}{a}\alpha_1, & \beta_3 = -\delta_1\sqrt{\frac{bc}{ad}}, & \beta_4 = \gamma_1\sqrt{\frac{bd}{ac}}, \\ \gamma_2 = \delta_1\sqrt{\frac{bc}{ad}}, & \gamma_3 = \frac{c}{a}\alpha_1, & \gamma_4 = \beta_1\sqrt{\frac{cd}{ab}}, \\ \delta_2 = -\gamma_1\sqrt{\frac{bd}{ac}}, & \delta_3 = \beta_1\sqrt{\frac{cd}{ab}}, & \delta_4 = \frac{d}{a}\alpha_1. \end{array}\right.$$

Il est inutile d'écrire les équations semblables qui s'obtiennent en ajoutant un, deux ou trois accents à toutes les lettres. Il faut déterminer les seize coefficients de (S_1), α_1, β_1, etc., de manière que les équations (39) fournissent pour les autres coefficients α_2, β_2, etc., des valeurs entières. Soient l le plus grand commun diviseur de ab et de cd,

l' celui de ac et de bd, l'' celui de ad et de bc. Les quotients $\frac{ab}{l}$, $\frac{cd}{l}$, $\frac{ac}{l'}$, $\frac{bd}{l'}$, $\frac{ad}{l''}$, $\frac{bc}{l''}$ doivent être des carrés, puisque les radicaux des expressions (39) disparaissent. Faisons donc

$$ab = (ab)^2 l, \quad ac = (ac)^2 l', \quad ad = (ad)^2 l'',$$
$$cd = (cd)^2 l, \quad bd = (bd)^2 l', \quad bc = (bc)^2 l'',$$

les équations (39) deviennent

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha_2 = -\beta_1, & \alpha_3 = -\gamma_1, & \alpha_4 = -\delta_1, \\ \beta_2 = \frac{b}{a}\alpha_1, & \beta_3 = -\frac{(bc)}{(ad)}\delta_1, & \beta_4 = \frac{(bd)}{(ac)}\gamma_1, \\ \gamma_2 = \frac{(bc)}{(ad)}\delta_1, & \gamma_3 = \frac{c}{a}\alpha_1, & \gamma_4 = -\frac{(cd)}{(ab)}\beta_1, \\ \delta_2 = -\frac{(bd)}{(ac)}\gamma_1, & \delta_3 = \frac{(cd)}{(ab)}\beta_1, & \delta_4 = \frac{d}{a}\alpha_1. \end{array}\right.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que a, b, c, d n'aient pas de diviseur commun. En examinant ces valeurs, on voit facilement que α_1, et, par suite, α'_1, α''_1, α'''_1 doivent être divisibles par a; de même, β_1, β'_1, β''_1, β'''_1 doivent l'être par (ab), γ_1, γ'_1, γ''_1, γ'''_1 par (ac), et δ_1, δ'_1, δ''_1, δ'''_1 par (ad). Le déterminant formé avec ces seize quantités le sera donc par $a(ab)(ac)(ad)$. Mais ce déterminant est égal à a^2; il faut donc que $\frac{a^2}{a(ab)(ac)(ad)}$ ou $\frac{a}{(ab)(ac)(ad)}$ soit un nombre entier. Cette condition peut encore s'énoncer autrement. Élevons l'expression $\frac{a}{(ab)(ac)(ad)}$ au carré, et remplaçons $(ab)^2$, $(ac)^2$, $(ad)^2$ par $\frac{ab}{l}$, $\frac{ac}{l'}$, $\frac{ad}{l''}$; elle devient $\frac{l\,l'\,l''}{abcd}$. Le produit $l\,l'\,l''$ doit donc être divisible par le déterminant $abcd$. D'un autre côté, il est facile de s'assurer que ce produit ne peut pas être plus grand que $abcd$. En effet, il ne contient pas d'autres facteurs premiers que ceux de $abcd$: soit φ l'un de ces facteurs et désignons par ε, ε', ε'', ε''' les exposants dont il est affecté dans les quatre nombres a, b, c, d; si l'on remarque que, par hypothèse, l'un de ces quatre exposants est nul, il est facile de s'assurer

que l'exposant de ϱ dans $ll'l''$ ne peut être plus grand que la somme

$$\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon'''.$$

Donc $ll'l''$ est au plus égal à $abcd$. Mais il doit être divisible par $abcd$. Donc enfin la condition nécessaire pour que les valeurs des inconnues données par les équations (39) soient entières se réduit à

$$ll'l'' = abcd. \tag{41}$$

Supposons cette condition remplie, la forme composée s'obtiendra immédiatement. Il suffit, en effet, de choisir les seize coefficients du système (S_1), de manière que leur déterminant soit égal à a^2. On peut prendre

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 = a, & \beta_1 = 0, & \gamma_1 = 0, & \delta_1 = 0. \\
\alpha'_1 = 0, & \beta'_1 = (ab), & \gamma'_1 = 0, & \delta'_1 = 0, \\
\alpha''_1 = 0, & \beta''_1 = 0, & \gamma''_1 = (ac), & \delta''_1 = 0, \\
\alpha'''_1 = 0, & \beta'''_1 = 0, & \gamma'''_1 = 0, & \delta'''_1 = (ad).
\end{array}$$

Les équations (39) fournissent les valeurs des autres coefficients, et, en achevant le calcul qui n'offre aucune difficulté, on trouve, pour la forme composée,

$$F = X^2 + lY^2 + l'Z^2 + l''V^2.$$

D'après la condition (41), le déterminant de cette forme est égal à $abcd$. Il est facile de vérifier directement que F est la forme composée, car on a bien

$$\left.\begin{aligned}
&(ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2)(ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + dv'^2) \\
&= (axx' + byy' + czz' + dvv')^2 \\
&+ l[(ab)(yx' - xy') + (cd)(vz' - zv')]^2 \\
&+ l'[(ac)(zx' - xz') + (bd)(yv' - vy')]^2 \\
&+ l''[(ad)(vx' - xv') + (bc)(zy' - yz')]^2.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Remarquons, en passant, que la condition

$$ll'l'' = abcd$$

se vérifie immédiatement sur la forme de Lagrange,

$$x^2 + by^2 + cz^2 + bcv^2;$$

on a, en effet,

$$l = b, \quad l' = c, \quad l'' = bc.$$

Revenons maintenant au cas plus général dans lequel les deux formes f et f' sont différentes.

Supposons d'abord que les neuf coefficients P_1, Q_1, R_1, P'_1, Q'_1, R'_1, P''_1, Q''_1, R''_1 soient connus; il nous sera facile d'obtenir une solution rationnelle. En faisant dans les deux formes

$$(43)\quad \begin{cases} x = x_1, & x'_1 = x'_1, \\ y = \frac{cd}{M} y_1, & y = \frac{c'd'}{M'} y'_1, \\ z = \frac{bd}{M} z_1, & z = \frac{b'd'}{M'} z'_1, \\ v = \frac{bc}{M} v_1, & v = \frac{b'c'}{M'} v'_1, \end{cases}$$

elles deviennent

$$f_1 = ax_1^2 + \frac{1}{a}(cdy_1^2 + bdz_1^2 + bcv_1^2),$$

$$f'_1 = a'x'^2_1 + \frac{1}{a'}(c'd'y'^2_1 + b'd'z'^2_1 + b'c'v'^2_1).$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, la substitution composée des neuf coefficients P_1, Q_1, etc., transformerait

$$cdy_1^2 + bdz_1^2 + bcv_1^2$$

en

$$c'd'y'^2_1 + b'd'z'^2_1 + b'c'v'^2_1;$$

il est facile d'en déduire les neuf coefficients P_2, Q_2, R_2, etc., de la substitution qui transformerait

$$c'd'y'^2_1 + b'd'z'^2_1 + b'c'v'^2_1$$

en

$$cdy_1^2 + bdz_1^2 + bcv_1^2.$$

En effectuant dans f'_1 la substitution

$$(44)\quad \begin{cases} x'_1 = x''_1, \\ y'_1 = P_2 y''_1 + Q_2 z''_1 + R_2 v''_1, \\ z'_1 = P'_2 y''_1 + Q'_2 z''_1 + R'_2 v''_1, \\ v'_1 = P''_2 y''_1 + Q''_2 z''_1 + R''_2 v''_1, \end{cases}$$

elle devient

$$f''_1 = a' x''^2_1 + \frac{1}{a'}(cdy''^2_1 + bdz''^2_1 + bcv''^2_1).$$

Remplaçant dans l'équation (42) les coefficients a, b, c, d par 1, cd, bd, bc, et les variables x, y, z, v, x', y', z', v' par $x_1\sqrt{a}$, $\frac{y_1}{\sqrt{a}}$, $\frac{z_1}{\sqrt{a}}$, $\frac{v_1}{\sqrt{a}}$, $x''_1\sqrt{a'}$, $\frac{y''_1}{\sqrt{a'}}$, $\frac{z''_1}{\sqrt{a'}}$, $\frac{v''_1}{\sqrt{a'}}$, on a

$$(45)\quad \begin{aligned} &\left[ax_1^2 + \frac{1}{a}(cdy_1^2 + bdz_1^2 + bcv_1^2)\right]\left[a'x''^2_1 + \frac{1}{a'}(cdy''^2_1 + bdz''^2_1 + bcv''^2_1)\right] \\ &= aa'\left[x_1 x''_1 + \frac{cd}{aa'}y_1 y''_1 + \frac{bd}{aa'}z_1 z''_1 + \frac{bc}{aa'}v_1 v''_1\right]^2 \\ &+ \frac{cd}{aa'}\left[a' y_1 x''_1 - a x_1 y''_1 + b(v_1 z''_1 - z_1 v''_1)\right]^2 \\ &+ \frac{bd}{aa'}\left[a' z_1 x''_1 - a x_1 z''_1 + c(y_1 v''_1 - v_1 y''_1)\right]^2 \\ &+ \frac{bc}{aa'}\left[a' v_1 x''_1 - a x_1 v''_1 + d(z_1 y''_1 - y_1 z''_1)\right]. \end{aligned}$$

Si l'on résout maintenant les équations (43) et (44) par rapport à x_1, y_1, z_1, v_1, x''_1, y''_1, z''_1, v''_1, et si l'on substitue les valeurs ainsi obtenues dans l'équation (45) afin de rétablir les variables primitives, on obtient

$$(46)\quad \begin{aligned} &(ax^2 + by^2 + cz_1 + dv^2)(a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + d'v'^2) \\ &= aa'(\alpha_1 x'x + \beta_1 x'y + \gamma_1 x'z + \ldots)^2 \\ &+ \frac{bd}{aa'}(\alpha'_1 x'x + \beta'_1 x'y + \gamma'_1 x'z + \ldots)^2 \\ &+ \frac{cd}{aa'}(\alpha''_1 x'x + \beta''_1 x'y + \gamma''_1 x'z + \ldots)^2 \\ &+ \frac{bd}{aa'}(\alpha'''_1 x'x + \beta'''_1 x'y + \gamma'''_1 x'z + \ldots)^2, \end{aligned}$$

α_1, β_1, γ_1, δ_1, α_2, etc., étant des fonctions rationnelles des quantités a, b, c, d, a', b', c', d', P_1, Q_1, R_1, etc.

D'après ce que nous avons vu plus haut, la forme composée F doit

pouvoir se déduire de la forme

$$aa'X^2 + \frac{1}{aa'}(bdY^2 + cdZ^2 + bcV^2),$$

que nous venons d'obtenir à l'aide d'une substitution rationnelle. Nous avons donc le théorème suivant :

Si deux formes quaternaires f et f' sont composables, ces deux formes et leur composée F *peuvent, au moyen de substitutions rationnelles, se ramener à de nouvelles formes f_1, f'_1, F_1, qui ne diffèrent plus que par un seul coefficient, savoir :*

$$f_1 = ax^2 + \frac{1}{a}(bdy^2 + cdz^2 + bcv^2),$$

$$f'_1 = a'x'^2 + \frac{1}{a'}(bdy'^2 + cdz'^2 + bcv'^2),$$

$$F_1 = aa'X^2 + \frac{1}{aa'}(bdY^2 + cdZ^2 + bcV^2).$$

Tous les cas de composition possibles sont donc compris dans l'équation (45), *et s'en déduiraient en remplaçant x, y, z, v, etc., par des fonctions linéaires et rationnelles de nouvelles variables.*

La solution générale du problème de la composition se ramène donc uniquement à la recherche d'une transformation entre deux formes ternaires; on ne connaît pas encore de solution générale de ce problème : en sorte que la forme composée ne peut être obtenue directement que dans des cas particuliers. Mais le théorème précédent montre que la composition des formes quaternaires a lieu dans des cas trop particuliers pour pouvoir conduire à des résultats importants. Une forme de cette espèce n'est même pas toujours composable avec elle-même. La classification des formes binaires créée par M. Gauss (*Disquisitiones arithmeticæ*, 301-307) n'a pas d'analogue dans les formes quaternaires; car il faudrait admettre des substitutions fractionnaires, ce qui donne à la forme composée une trop grande généralité, et ne permet plus de considérer la composition des classes, mais seulement celle des genres.

Nous avons supposé jusqu'ici que les formes données ne contenaient

que les carrés des variables; mais il est aisé de voir que les propositions précédentes n'en sont pas moins générales. Car on peut toujours, au moyen d'une substitution rationnelle, faire disparaître les doubles produits des variables, et remplacer les formes proposées par des transformées sur lesquelles on raisonnera comme nous venons de le faire. Il suffira ensuite de revenir aux variables primitives par de nouvelles substitutions rationnelles inverses des premières. Mais ces transformations ne modifient les déterminants primitifs qu'en leur ajoutant ou leur enlevant des facteurs carrés; les déterminants des formes transformées devant être des carrés parfaits, il en est de même de ceux des proposées, et, par suite, toutes les conclusions que nous en avons déduites sont applicables à ces dernières.

NOTE

SUR

UN THÉORÈME RELATIF AUX DÉTERMINANTS GAUCHES:

PAR M. FRANÇOIS BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie.

En indiquant par $c_{r,s}$ les coefficients d'une substitution linéaire orthogonale, on a, comme on sait, entre ces coefficients, $\frac{n(n+1)}{2}$ équations de la forme

$$c_{1,r}c_{1,s} + c_{2,r}c_{2,s} + \ldots + c_{n,r}c_{n,s} = 0,$$
$$c_{1,r}^2 + c_{2,r}^2 + \ldots + c_{n,r}^2 = 1;$$

et M. Cayley a démontré qu'en nommant Δ le déterminant

$$\sum(\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}),$$

dont les éléments sont assujettis aux conditions

$$a_{r,r} = 1, \quad a_{r,s} + a_{s,r} = 0,$$

et en posant

$$\alpha_{r,s} = \frac{d\Delta}{da_{r,s}},$$

ces équations sont vérifiées par les valeurs suivantes :

$$\Delta c_{r,1} = 2\alpha_{1,r}, \qquad \Delta c_{r,2} = 2\alpha_{2,r}, \ldots,$$
$$\Delta c_{r,r} = 2\alpha_{r,r} - \Delta, \ldots, \quad \Delta c_{r,n} = 2\alpha_{n,r}.$$

Cela posé, voici le théorème en question :

L'équation

$$(A) \qquad \begin{vmatrix} c_{1,1} - \lambda, & c_{1,2}, \ldots, & c_{1,n} \\ c_{2,1}, & c_{2,2} - \lambda, \ldots, & c_{2,n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & c_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

a, lorsque n est impair, une racine égale à l'unité et les $n-1$ autres imaginaires et deux à deux réciproques; lorsque n est pair les racines sont toutes imaginaires et deux à deux réciproques.

En effet, en substituant dans le premier membre de cette équation les valeurs ci-dessus de $c_{r,1}, c_{r,2}, \ldots$, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1}-\mu, & \alpha_{2,1}, & \ldots, & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2}, & \alpha_{2,2}-\mu, & \ldots, & \alpha_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1,n}, & \alpha_{2,n}, & \ldots, & \alpha_{n,n}-\mu \end{vmatrix} = 0,$$

ou $\mu = \Delta^{\frac{1+\lambda}{2}}$: et, en multipliant cette dernière par Δ, on a

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} z, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & z, \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & z \end{vmatrix} = 0,$$

en posant $z = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$, et, par conséquent, $\lambda = \frac{1+z}{1-z}$.

J'observe qu'en supposant n impair le premier membre de cette équation est un déterminant gauche d'ordre impair, qui se réduira à zéro pour $z=0$; ainsi $\lambda=1$ sera une racine de l'équation (A). Mais en développant l'équation (1), on a, pour n impair, comme on le sait déjà par des théorèmes dus à M. Cayley [*],

$$z^n + z^{n-2}\sum_r (\Delta_{r,n-2})_0 + z^{n-4}\sum_r (\Delta_{r,n-4})_0 + \ldots$$
$$+ z^3\sum_r (\Delta_{r,3})_0 + z\sum_r (\Delta_{r,1})_0 = 0,$$

$(\Delta_{r,s})_0$ représentant un déterminant mineur principal de l'ordre $s^{ième}$ dans lequel on a posé les éléments principaux égaux à zéro. Par conséquent une des racines de l'équation (1) sera zéro, comme on l'a déjà observé : les autres racines seront deux à deux égales et de signe contraire, et leurs carrés seront donnés par l'équation

$$(2) \qquad y^m + y^{m-1}\sum_r (\Delta_{r,n-2})_0 + \ldots + y\sum_r (\Delta_{r,3})_0 + \sum_r (\Delta_{r,1})_0 = 0.$$

[*] CRELLE, *Journal für die Mathematik*, band 38.

qu'on obtient en faisant $y = z^2$ et $m = \frac{n-1}{2}$. Les $(n-1)$ racines de l'équation (A), qui restaient à trouver après la racine $\lambda = 1$, seront donc réciproques, comme on voulait le démontrer. J'observe, enfin, que tous les termes du premier membre de l'équation (2) sont essentiellement positifs, parce que chacun des déterminants gauches symétriques d'ordre pair $(\Delta_{r,s})$ est un carré; par conséquent, l'équation (2) n'a aucune racine positive; les valeurs correspondantes de z, et, par suite, de λ, sont donc imaginaires.

En nommant $-y_1$ une quelconque des racines de l'équation (2), on a

$$z = \pm i y_1, \quad i = \sqrt{-1},$$

et les racines réciproques correspondantes de l'équation (A) sont

$$\lambda_1 = \frac{1+iy_1}{1-iy_1}, \quad \lambda' = \frac{1-iy_1}{1+iy_1},$$

ou

$$\lambda_1 = a + ib, \quad \lambda' = a - ib,$$

en faisant

$$a = \frac{1-y_1}{1+y_1}, \quad b = \frac{2\sqrt{y_1}}{1+y_1}.$$

Je suppose

$$a \pm ib = r_1(\cos\theta_1 \pm i\sin\theta_1),$$

on a

$$r_1^2 = a^2 + b^2 = 1, \quad \operatorname{tang}\theta_1 = \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{y_1}}{1-y_1};$$

par conséquent,

$$\sqrt{y_1} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_1,$$

et

$$\sum_r (\Delta_{r,1})_0 = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_1 \,.\, \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_2 \ldots \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_m,$$

$$\sum_r (\Delta_{r,n-2})_0 = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_2 + \ldots + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_m.$$

Pour $n = 3$, l'équation (2) nous donne

$$y + a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{2,3}^2 = 0,$$

et l'on aura

$$a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{2,3}^2 = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta,$$

ou

$$a_{1,2} = \cos\alpha \,.\, \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta, \quad a_{1,3} = \cos\beta \,.\, \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta, \quad a_{2,3} = \cos\gamma \,.\, \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta,$$

en supposant

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Pour $n = 5$, on aura

$$a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{1,4}^2 + a_{1,5}^2 + a_{2,3}^2 + a_{2,4}^2 + a_{2,5}^2 + a_{3,4}^2 + a_{3,5}^2 + a_{4,5}^2$$
$$= \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_2,$$

et, en général,

$$\sum_r \sum a_{r,s}^2 = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_2 + \ldots + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_m.$$

On déduit de ce théorème une propriété énoncée par Euler comme ayant lieu dans le mouvement d'un corps, propriété qui a été le point de départ pour la recherche des formules très-connues qu'on doit à Euler, Lexell, Rodrigues [*], pour la transformation des coordonnées. On peut en déduire aussi un théorème énoncé récemment par M. Hermite [**].

Maintenant supposons n pair; on a alors, en développant l'équation (1),

$$z^n + z^{n-2}\sum_r (\Delta_{r,n-2})_0 + \ldots + z^2\sum_r (\Delta_{r,2})_0 + \Delta_0 = 0:$$

les coefficients de tous les termes étant positifs, les valeurs de z^2 que cette équation fournit ne sont jamais positives; z est donc essentiellement imaginaire, et il en est de même des racines de l'équation (A), lesquelles sont d'ailleurs évidemment deux à deux réciproques puisque les valeurs de z sont deux à deux égales et de signe contraire. Notre théorème est donc démontré dans ce second cas comme dans le premier.

---

[*] *Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, 1775. — LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques*, tome V.

[**] *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, n° XXXIV, fev. 1854.

SUR

LA THÉORIE DES FONCTIONS ABÉLIENNES[*];

PAR M. LE Dr WEIERSTRASS,
Professeur de Mathématiques au Collége de Braunsberg (Prusse orientale).

M'étant occupé depuis plusieurs années de la théorie des *transcendantes abéliennes*, je suis arrivé à des résultats qui ne paraissent pas être indignes de l'attention des géomètres, et que je me propose de développer dans une suite de Mémoires. Le premier de ces Mémoires, dont la rédaction est déjà complétement achevée, aura pour objet principal le problème de représenter explicitement les fonctions périodiques de plusieurs arguments, dont les propriétés fondamentales se trouvent énoncées, ainsi que M. Jacobi l'a démontré le premier, dans le théorème d'Abel sur les *intégrales hyper-elliptiques :* problème résolu d'une manière brillante par MM. Gœpel et Rosenhain pour les fonctions de *deux* arguments, mais qui sera traité ici dans toute sa généralité. Je me servirai pour cette discussion d'une méthode tout à fait différente de celle des deux géomètres cités, et je puis dire de plus dès à présent que cette méthode fait espérer des résultats analogues pour des transcendantes plus élevées encore. Les feuilles suivantes présentent un aperçu succinct de mon travail.

§ I.

Je donne au système d'équations intégrales, qui doit servir, d'après M. Jacobi, de point de départ à la théorie des transcendantes abéliennes, la forme suivante que j'ai reconnue comme la plus simple et la plus appropriée à la discussion.

[*] Tiré du *Journal de M. Crelle*, vol. XLVII, et traduit de l'allemand par M. *Woepcke*.

Soit

$$R(x) = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2n})$$

une fonction entière de degré $2n + 1$; je suppose, en premier lieu, que les quantités $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont toutes *réelles*, et arrangées de telle sorte que

$$a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{2n}.$$

Décomposons $R(x)$ dans les deux facteurs

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_{2n-1})$$

et

$$Q(x) = (x - a_0)(x - a_2)\ldots(x - a_{2n});$$

puis, en considérant $u_1, u_2, \ldots, u_n$ comme des variables illimitées, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme des fonctions de ces quantités, représentons les relations qui existent entre ces $2n$ variables par les n équations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
u_1 &= \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x - a_1} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_3} \frac{P(x)}{x - a_1} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \ldots \\
&\qquad + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x - a_1} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \\
u_2 &= \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x - a_3} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_3} \frac{P(x)}{x - a_3} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \ldots \\
&\qquad + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x - a_3} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n &= \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x - a_{2n-1}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_3} \frac{P(x)}{x - a_{2n-1}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \ldots \\
&\qquad + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x - a_{2n-1}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}.
\end{aligned}\right.$$

Maintenant je démontre d'une manière détaillée, en m'appuyant sur le théorème d'Abel, le théorème énoncé déjà essentiellement par M. Jacobi, et que je considère comme la base de toute cette théorie; savoir, qu'à des valeurs données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il correspond un

nombre infini de valeurs différentes des quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$, mais que si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont données, les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ainsi que les valeurs correspondantes de $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_n)}$, sont complétement déterminées. *En effet, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines d'une équation de degré n, dont les coefficients sont des fonctions complétement déterminées et à sens unique des variables illimitées $u_1, u_2, \ldots, u_n$, tandis qu'une seconde fonction entière de x, dont les coefficients sont des fonctions semblables de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, donne pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs correspondantes de $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_n)}$.*

D'après cela, toute fonction symétrique et rationnelle de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut être considérée comme une fonction à sens unique de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. On trouve, en particulier, que

$$(a_\alpha - x_1)(a_\alpha - x_2)\ldots(a_\alpha - x_n)$$

(où α désigne un des nombres $0, 1, \ldots, 2n$) est le *carré* d'une telle fonction. Conséquemment, en exprimant le plus grand nombre contenu dans $\frac{1}{2}\alpha$ par $\overline{\alpha}$, et en posant

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = L(x),$$

je désigne

$$(2) \qquad \frac{\sqrt{\left[(-1)^{\overline{\alpha}} L(a_\alpha)\right]}}{\sqrt[4]{\left[(-1)^{\alpha} R'(a_\alpha)\right]}} \quad \text{par} \quad \operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots, u_n)_\alpha,$$

et j'appelle les $2n+1$ quantités $\operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots)_1$, etc., ainsi définies, *fonctions abéliennes*, attendu que ce sont elles qui correspondent parfaitement aux *fonctions elliptiques* $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$. Les séries développées suivant les puissances de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ont la forme suivante :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2a-1} \\ &= \sqrt[4]{\left[\frac{-Q(a_{2a-1})}{P'(a_{2a-1})}\right]} \cdot \left[u_a + (u_1, u_2, \ldots)_3 + (u_1, u_2, \ldots)_5 + \ldots\right], \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2b} \\ &= \sqrt[4]{\left[\frac{P(a_{2b})}{Q'(a_{2b})}\right]} \cdot \left[1 + (u_1, u_2, \ldots)_2 + (u_1, u_2, \ldots)_4 + \ldots\right]. \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules, $\mathfrak{a}$ désigne un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$; $\mathfrak{b}$ un quelconque des nombres $0, 1, \ldots, n$; et $(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ une fonction entière et homogène de degré α. Je fais observer qu'en général, dans ce qui suit, $\mathfrak{a}$, c et $\mathfrak{a}'$, c' désigneront un des nombres $1, 2, \ldots, n$; tandis que $\mathfrak{b}$ désignera un des nombres $0, 1, \ldots, n$. Il faut observer, en outre, que partout où il se présentera la racine (deuxième ou quatrième) d'une expression *positive* composée par multiplication et division des différences $a_0 - a_1$, $a_0 - a_2, \ldots$, $a_1 - a_2$, $a_1 - a_3, \ldots$, on devra toujours prendre la valeur *positive* de cette racine.

Les séries ci-dessus ne peuvent pas être *convergentes* pour *toutes* les valeurs de $u_1, u_2, \ldots$. Cependant, ce sont elles que je prends pour point de départ, en définissant d'abord les fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ seulement pour des valeurs de $u_1, u_2, \ldots$, qui rendent toutes les séries proposées convergentes. Ensuite, je développe la propriété principale des fonctions ainsi définies; savoir, que si $u_1, u_2, \ldots$ sont remplacés par des quantités composées de deux éléments $u_1 + v_1$, $u_2 + v_2, \ldots$, les valeurs de ces fonctions s'expriment *rationnellement* par $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1, \ldots$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2n}$; $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_1, \ldots$, $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_{2n}$, et par les dérivées partielles du premier ordre de ces quantités. Puis je démontre, au moyen des formules ainsi trouvées, qu'il y a des fonctions de $u_1, u_2, \ldots$ à sens unique existant pour *toutes* les valeurs de $u_1, u_2, \ldots$ qui s'identifient avec les fonctions représentées par les séries ci-dessus pour les valeurs de $u_1, u_2, \ldots$, qui les rendent *convergentes*, et que je désigne, à partir de là, par les notations $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1, \ldots$. Cela posé, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui satisfont aux équations (1) pour des valeurs quelconques de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, seront les n racines de l'équation suivante :

$$(5)\qquad \frac{e_1^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_1}{a_1 - x} + \frac{e_3^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_3}{a_3 - x} + \ldots + \frac{e_{2n-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2n-1}}{a_{2n-1} - x} = 1,$$

où

$$\sqrt[4]{\left[\frac{-Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}\right]} = e_{2\mathfrak{a}-1}.$$

En outre, on a

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})} \\ &= \frac{u_{2c-1} - x_{\mathfrak{a}}}{e_{2c-1}^2 \,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1}} \cdot \sum_{\mathfrak{a}=1,2,\ldots,n} \left[\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2 P(x_{\mathfrak{a}}) \,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{a}-1} - x_{\mathfrak{a}}} \cdot \frac{d\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{du_c} \right], \end{aligned} \right.$$

où c désigne un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$.

Au reste, on peut proposer, en place des formules (5) et (6), d'autres très-semblables, dans lesquelles figurent n quelconques des fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1, \ldots$. En exprimant par x_1, $x_2, \ldots, x_n$ les différentielles de ces fonctions, on trouve l'occasion d'introduire encore une série d'autres fonctions, représentées par la formule

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta} \\ &= \sqrt{[\pm(a_\alpha - a_\beta)]} \,.\, \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha \,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\beta \cdot \sum_{\mathfrak{a}} \left[\frac{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}} - a_\alpha)(x_{\mathfrak{a}} - a_\beta) L'(x_{\mathfrak{a}})} \right], \end{aligned} \right.$$

où l'on prendra le signe supérieur ou inférieur de $(a_\alpha - a_\beta)$ suivant que $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$, α et β désignant deux nombres différents de la suite $0, 1, 2, \ldots, 2n$. On aura alors

$$(8)\quad \frac{d\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{du_{\mathfrak{a}}} = -\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2}{\sqrt{\pm[(a_\alpha - a_{2\mathfrak{a}-1})]}} \cdot \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1} \,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha, 2\mathfrak{a}-1},$$

en supposant $\alpha \gtrless 2\mathfrak{a} - 1$. De cette équation, il suit la relation remarquable que voici :

$$(9)\quad e_{2\mathfrak{a}-1}^2 \frac{d\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{du_c} = e_{2c-1}^2 \frac{d\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1}}{du_{\mathfrak{a}}}.$$

Entre les fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ et $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$ il existe des relations nombreuses. Les suivantes me paraissent particulièrement dignes d'être remarquées :

$$(10)\quad \left\{ \frac{\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}}}{e_{2\mathfrak{b}}^2} = 1 - \sum_{\mathfrak{a}=1,\ldots,n} \left[\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2 \,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{b}} - a_{2\mathfrak{a}-1}} \right], \right.$$

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\pm \frac{\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b},2c-1}}{e_{2\mathfrak{b}-1}^2} = \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1} + \frac{e_{2c-1}^2}{a_{2\mathfrak{b}} - a_{2c-1}} \\ &+ \sum_{\mathfrak{a}=1,\ldots,c-1} \left[\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2 \,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1,2c-1}}{a_{2\mathfrak{b}} - a_{2\mathfrak{a}-1}} \right] - \sum_{\mathfrak{a}=c+1,\ldots,n} \left[\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2 \,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1,2c-1}}{a_{2\mathfrak{b}} - a_{2\mathfrak{a}-1}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Dans cette dernière équation, on prendra le signe supérieur ou inférieur suivant que $2c - 1$ est plus petit ou plus grand que $2b$. Au moyen des équations (8 à 11), on peut aussi établir une relation algébrique entre chacune des $(2n+1)n$ dérivées du premier ordre des fonctions al $(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ et n de ces dernières fonctions.

§ II.

Maintenant j'introduis les quantités analogues aux intégrales elliptiques complètes *de première espèce*. Si x est réel et compris entre les limites $a_{\alpha-1}$ et a_α, on a

$$R(x) = (-1)^\alpha (a_0 - x)\ldots(a_{\alpha-1} - x)(x - a_\alpha)\ldots(x - a_{2n}).$$

et, conséquemment, on peut poser

$$\sqrt{R(x)} = \pm i^\alpha \sqrt{(a_0 - x)}\ldots\sqrt{(a_{\alpha-1} - x)}.\sqrt{(x - a_\alpha)}\ldots\sqrt{(x - a_{2n})},$$

où les racines du second membre sont toutes positives.

En outre, on a, si x est compris entre $+\infty$ et a_0,

$$\sqrt{R(x)} = \pm\sqrt{(x - a_0)}\ldots\sqrt{(x - a_{2n})},$$

et, si x est compris entre a_{2n} et $-\infty$,

$$\sqrt{R(x)} = \pm i^{2n+1}\sqrt{(a_0 - x)}\ldots\sqrt{(a_{2n} - x)}.$$

En représentant par a et b deux quantités réelles et par $F(x)$ une fonction rationnelle de x, je désigne par

$$\overline{\int_a^b} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

la valeur particulière que prend la formule

$$\int_a^b \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

si l'on détermine, en intégrant, $\sqrt{R(x)}$ au moyen des formules ci-dessus, en employant le signe *supérieur*. Cela posé, désignons

$$\overline{\int_{a_\alpha}^{\infty}} \frac{P(x)\,dx}{2(x - a_{\alpha-1})\sqrt{R(x)}} \quad \text{par} \quad \overset{a}{K}_\alpha,$$

on aura la relation

$$(12)\qquad \overset{0}{K}_{\mathfrak{a}} - \overset{1}{K}_{\mathfrak{a}} + \overset{2}{K}_{\mathfrak{a}} - \ldots + \overset{2\mathfrak{a}}{K}_{\mathfrak{a}} = 0, \quad \text{pour} \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n.$$

Qu'il soit, en outre,

$$(13)\qquad K_{\mathfrak{a},c} = \overset{2c-1}{K}_{\mathfrak{a}} - \overset{2c}{K}_{\mathfrak{a}} = \overline{\int_{a_{2c-1}}^{a_{2c}} \frac{P(x)\,dx}{2(x - a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{R(x)}}} = -\int_{a_{2c-1}}^{a_{2c}} \sqrt{\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]} \cdot \frac{dx}{a_{2\mathfrak{a}-1} - x},$$

$$i\overline{K}_{\mathfrak{a},c} = \overset{2c-2}{K}_{\mathfrak{a}} - \overset{2c-1}{K}_{\mathfrak{a}} = \overline{\int_{a_{2c-2}}^{a_{2c-1}} \frac{P(x)\,dx}{2(x - a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{R(x)}}},$$

donc

$$(14)\qquad \overline{K}_{\mathfrak{a},c} = -\int_{a_{2c-2}}^{a_{2c-1}} \sqrt{\left[\frac{-P(x)}{Q(x)}\right]} \frac{dx}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}},$$

où l'on prendra la valeur positive de $\sqrt{\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]}$ dans la première intégration et la valeur positive de $\sqrt{\left[\frac{-P(x)}{Q(x)}\right]}$ dans la seconde. On obtiendra

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\overset{0}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},1} + K_{\mathfrak{a},2} + \ldots + K_{\mathfrak{a},n}, \\
\overset{1}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},1} + K_{\mathfrak{a},2} + \ldots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1}, \\
\overset{2}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},2} + K_{\mathfrak{a},3} + \ldots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1}, \\
\overset{3}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},2}, \\
\overset{4}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overset{2n}{K}_{\mathfrak{a}} = -i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},2} - \ldots - i\overline{K}_{\mathfrak{a},n}.
\end{array}\right.$$

Un cas particulier du théorème d'Abel conduit ensuite aux formules suivantes, dans lesquelles α, β, γ désignent des nombres de la suite 0, 1, 2,..., $2n$, et où le symbole $\alpha|\beta$ représente 0 si $\alpha < \beta$, et 1 si $\alpha > \beta$:

$$(16)\qquad \mathrm{al}(u_1 + \overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\alpha - 2\bar{\alpha}}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha}, \qquad \mathrm{al}(u_1 - \overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\alpha - 2\bar{\alpha}}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha};$$

$$(17)\qquad \mathrm{al}(u_1 + \overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\beta|\alpha}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\beta}, \quad \mathrm{al}(u_1 - \overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{-i^{\beta|\alpha}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\beta}.$$

De ces relations, on déduit

$$(18)\qquad \begin{cases} \operatorname{al}(u_1 + 2\overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = +\operatorname{al}(u_1, \ldots)_\alpha, \\ \operatorname{al}(u_1 + 2\overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = -\operatorname{al}(u_1, \ldots)_\alpha, \text{ si } \beta \gtrless \alpha, \end{cases}$$

et, en posant

$$K_a = \mu_0 \overset{0}{K}_a + \mu_1 \overset{1}{K}_a + \ldots + \mu_{2n} \overset{2n}{K}_a,$$
$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{2n},$$

où $\mu_0, \mu_1, \ldots$ désignent des nombres entiers quelconques,

$$(19)\qquad \operatorname{al}(u_1 2K_1, \ldots)_\alpha = (-1)^{\mu - \mu_\alpha} \operatorname{al}(u_1, \ldots)_\alpha.$$

Maintenant, posons

$$(20)\qquad K'_{a,c} = \overline{K}_{a,1} + \overline{K}_{a,2} + \ldots + \overline{K}_{a,c}$$

et

$$(21)\qquad \begin{cases} \omega_a = m_1 K_{a,1} + m_2 K_{a,2} + \ldots + m_n K_{a,n}, \\ \omega'_a = n_1 K'_{a,1} + n_2 K'_{a,2} + \ldots + n_n K'_{a,n}, \end{cases}$$

(où $m_1, m_2, \ldots, n_1, n_2, \ldots$ désignent également des nombres entiers quelconques), on obtiendra les formules

$$(22)\qquad \operatorname{al}(u_1 + 2\omega_1, \ldots)_\alpha = (-1)^{m_\alpha - \bar{\alpha}} \operatorname{al}(u_1, \ldots)_\alpha,$$

où, pour $\alpha = 0$, il faut prendre $m_0 = 0$, et

$$(23)\qquad \operatorname{al}(u_1 + 2\omega'_1 i, \ldots)_\alpha = (-1)^{n_n + n_{n-1} + \ldots + n_{\bar{\alpha}+1}} \operatorname{al}(u_1, \ldots)_\alpha,$$

où, pour $\alpha = 2n$, il faut égaler le facteur de $\operatorname{al}(u_1, \ldots)_{2n}$ à 1. Au moyen de la formule (17) on obtient des relations semblables pour les fonctions $\operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$.

§ III.

Les fonctions $\operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ présentent la particularité qu'elles deviennent toutes infinies pour les mêmes valeurs de $u_1, u_2, \ldots$. En outre, je fais voir, en démontrant le théorème principal énoncé dans le § Ier,

que (si l'on renferme les valeurs absolues de u_1, u_2, etc., entre des limites déterminées, aussi larges d'ailleurs qu'on voudra, mais qu'elles ne pourront pas dépasser) chacune de ces fonctions peut être représentée comme le quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de u_1, u_2, etc., et *convergentes* pour toutes les valeurs de ces variables comprises entre les limites proposées. Cela donne lieu à supposer que les fonctions al $(u_1,\ldots)_0$, al $(u_1,\ldots)_1$, etc., peuvent être représentées comme des fractions ayant un dénominateur commun, et dont les numérateurs, de même que ce dénominateur, sont des fonctions de u_1, u_2,... qui ne deviennent jamais infinies, et qui sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de leurs arguments et *constamment* convergentes. Si l'on peut réellement poser al $(u_1,\ldots)_\alpha = \frac{p_\alpha}{p}$ (en désignant par p, p_α des fonctions de l'espèce que nous venons de dire), d log al $(u_1,\ldots)_\alpha$ devra être composé de deux parties, dont l'une devient infinie pour toutes les valeurs de u_1, u_2, etc., qui font al $(u_1, u_2,\ldots)_\alpha = 0$, et l'autre pour toutes celles qui rendent al $(u_1,\ldots)_\alpha$ infini. La même chose a lieu pour les différentielles logarithmiques d'ordres supérieurs de al $(u_1, u_2,\ldots)_\alpha$. Supposant qu'il soit $d^\mu \log \text{al}\,(u_1,\ldots)_\alpha = \mathrm{P}_\alpha - \mathrm{P}$, où $\mathrm{P}_\alpha = \infty$ pour al $(u_1,\ldots)_\alpha = 0$, et $\mathrm{P} = \infty$ pour al $(u_1,\ldots)_\alpha = \infty$, on pourra poser $d^\mu \log p_\alpha = \mathrm{P}_\alpha$, $d^\mu \log p = \mathrm{P}$; et comme P_α, P sont exprimables en al $(u_1,\ldots)_0$, al $(u_1,\ldots)_1$, etc., donc aussi en p_0, $p_1,\ldots$, p_{2n}, p, on devra arriver de cette manière à $2n+2$ équations différentielles entre ces $2n+2$ quantités.

Pour les fonctions *elliptiques* ce calcul est très-facile. Car si $x = \sin \text{am}\, u$, on a

$$\frac{d^2 \log x}{du^2} = k^2 x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Posant

$$x = \frac{p_1}{p},$$

il vient

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} - \frac{d^2 \log p}{du^2} = k^2 \cdot \frac{p_1^2}{p^2} - \frac{p^2}{p_1^2}.$$

On décomposera cette équation dans les deux suivantes :

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} = -\frac{p^2}{p_1^2}, \quad \frac{d^2 \log p}{du^2} = -k^2 \frac{p_1^2}{p^2}.$$

Après avoir montré que, si la valeur absolue de u ne dépasse pas une limite prise à volonté, sin am u peut être représenté comme le quotient de deux séries développées suivant les puissances entières de u et convergentes pour toutes les valeurs de u inférieures à cette limite, on peut démontrer rigoureusement (ainsi que je l'ai fait dans mon Mémoire) que les fonctions p, p_1, définies par les deux équations différentielles ci-dessus, peuvent être développées en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de u et *constamment convergentes*, c'est-à-dire convergentes pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de u. Et en déterminant les quatre constantes arbitraires qu'elles renferment, de manière que, pour $u = 0$,

$$p = 1, \quad \frac{dp}{du} = 0, \quad p_1 = 0, \quad \frac{dp_1}{du} = 1,$$

on trouve effectivement

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{p_1}{p}.$$

Il existe des développements analogues pour cos am u, Δ am u, et l'on arrive, de cette manière, à la représentation des fonctions elliptiques qu'Abel mentionne dans une lettre adressée à M. Legendre (tome VI, page 76 du Journal de M. Crelle), sans l'avoir cependant exécutée et sans indiquer sa méthode. Des fonctions p, p_1 on arrive facilement aux fonctions $\Theta(u)$, $\Pi(u)$ de M. Jacobi, et l'on peut ainsi exécuter le développement des fonctions elliptiques dans toutes les formes sans le fonder sur les formules de la transformation ou de la multiplication. En général, on peut prendre les équations différentielles ci-dessus en p et p_1 pour base d'une théorie complète des transcendantes elliptiques, ainsi que je l'ai exécuté effectivement dans un Mémoire composé déjà en 1840 et présenté à cette époque à la Commission d'examen de Munster.

Maintenant j'ai essayé un calcul analogue pour $\operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ comme pour p, p_1. A l'aide des formules mentionnées dans le § Ier, au

moyen desquelles on peut exprimer $\mathrm{al}(u_1+v_1,\ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1+v_1,\ldots)_1$, etc., par les fonctions de $u_1, u_2,\ldots, u_n$ et de $v_1, v_2,\ldots, v_n$, on peut trouver les différentielles secondes des fonctions abéliennes, et l'on obtient $d^2 \log \mathrm{al}(u_1,\ldots)_\alpha$ exprimé en $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_1$, etc., et leurs différentielles premières. En employant les relations (8 à 11), on peut ensuite donner à ces expressions la forme sus-mentionnée, et, en posant

$$\mathrm{al}(u_1\ldots)_\alpha = \frac{p_\alpha}{p}, \quad \mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\alpha,\beta} = \frac{p_{\alpha,\beta}}{p},$$

on peut trouver un nombre suffisant d'équations différentielles du second ordre pour les quantités p, p_α, $p_{\alpha,\beta}$; enfin, on peut prouver que les fonctions ainsi définies sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières de u_1, u_2, etc., et *constamment* convergentes. De cette manière, je démontrai (vers la fin de l'année 1847) le théorème que je pouvais considérer comme le pas le plus important pour arriver à une représentation des fonctions abéliennes pour toutes les valeurs des arguments u_1, u_2, etc.; savoir, que les fonctions $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\alpha$, $\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\alpha,\beta}$ peuvent être représentées sous la forme de fractions ayant un dénominateur commun, et dont les numérateurs et le dénominateur présentent essentiellement le caractère de fonctions *entières*, attendu qu'ils existent pour toutes les valeurs réelles et imaginaires des arguments u_1, u_2, etc., et qu'ils sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de ces arguments et constamment convergentes. En appliquant aux fonctions auxiliaires ainsi obtenues exactement la même méthode qui m'avait conduit des fonctions sus-mentionnées, au moyen desquelles j'avais exprimé les fonctions elliptiques, aux fonctions Θ, j'arrivai, par un procédé qui n'admet rien d'arbitraire, aux séries aussi simples que remarquables par leur forme, auxquelles, pour $n = 2$, MM. Gœpel et Rosenhain avaient ramené, avant moi, les fonctions abéliennes de *deux* arguments.

Cependant les calculs nécessaires pour obtenir les résultats que je viens d'exposer ne laissent pas d'être assez compliqués. C'est pourquoi j'essayai, en poursuivant toujours la même idée fondamentale, d'arriver au même but d'une manière plus simple. J'y réussis en faisant

intervenir dès l'abord dans la discussion les intégrales abéliennes de deuxième et de troisième espèce, et en les exprimant par $u_1, u_2, \ldots, u_n$, d'une manière analogue à ce qu'on fait pour les intégrales elliptiques correspondantes.

Le Mémoire de M. Gœpel parut pendant le temps où j'étais occupé de ces recherches. Ses résultats et sa méthode ne sont pas aussi simples qu'ils pourraient l'être, même en suivant la voie qu'il a adoptée. Quant au travail de M. Rosenhain, qui n'a été publié qu'après l'achèvement du mien, je n'en connais, jusqu'à présent, que les notices publiées dans le Journal de M. Crelle, et extraites de lettres adressées à M. Jacobi. D'après ce que j'ai pu en conclure, ses résultats s'accordent complétement avec les miens trouvés d'une manière tout à fait différente. Mais je ne crois pas qu'on puisse traiter par les méthodes de ces deux géomètres des fonctions abéliennes d'un ordre supérieur au premier. M. Jacobi a fait remarquer que déjà pour $n = 3$ les fonctions Θ généralisées renferment essentiellement plus de constantes que les fonctions abéliennes à trois arguments conjointement. Conséquemment, il doit exister entre ces constantes des équations de condition pour que les séries en question puissent conduire à des fonctions abéliennes. J'ai trouvé, il est vrai, ces relations pour toutes les valeurs de n, mais je doute que cela soit possible *à priori*, si l'on prend pour point de départ les susdites séries, sans faire usage d'une théorie des fonctions abéliennes développée d'après une autre méthode.

§ IV.

Représentant par a une quantité arbitraire, posons

$$(24)\qquad \sum_{a} \int_{x_{2a-1}}^{x_{2a}} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \frac{P(x)}{x-a} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = S(u_1, u_2, \ldots),$$

en imaginant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ exprimés en $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et en supposant que pour chaque intégration séparément x parcourt exactement les mêmes valeurs que dans les intégrations des équations (1). Ainsi dé-

fini, $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ peut être considéré comme une fonction *logarithmique* de u_1, u_2, etc., c'est-à-dire comme une fonction de la forme

$$A \log \varphi(u_1, u_2, \ldots) + \varphi_1(u_1, u_2, \ldots),$$

où φ, φ_1 sont des fonctions *à sens unique* de u_1, u_2, etc. Parmi les formules nombreuses relatives à cette fonction, je ne cite que la suivante :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\,\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)}{du_c} \\ &= \tfrac{1}{2} e_{2c-1}\, \mathrm{al}(\overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1}\, \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1} \left[\mathrm{al}(u_1 + \overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1} + \mathrm{al}(u_1 - \overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1}\right] \\ &= \frac{e_{2c-1}^2 \sqrt{\mathrm{R}(a)}}{(a - a_{2c-1})\,\mathrm{P}(a)} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1}}{1 - \sum\limits_{\mathfrak{a}} \left[\dfrac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\, \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{a}-1} - a}\right]}, \end{aligned}\right.$$

où

$$(26)\qquad \overset{c}{w}_{\mathfrak{a}} = \int_{a_{2c-1}}^{a} \frac{\mathrm{P}(x)\,dx}{2(x - a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{\mathrm{R}(x)}}.$$

La lettre $\mathfrak{a}$ placée sous le signe $\sum$ signifie que dans une formule telle que $\sum\limits_{\mathfrak{a}} A_{\mathfrak{a}}$ la sommation doit être faite par rapport au nombre entier variable $\mathfrak{a}$ qui parcourra toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à n.

Posant maintenant

$$(27)\qquad \frac{\mathrm{P}(a)}{\sqrt{\mathrm{R}(a)}} = b,$$

on pourra, toutes les fois que a se trouve dans le voisinage d'une des valeurs a_1, $a_3, \ldots, a_{2n-1}$, développer $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ suivant les puissances de b, sous la forme que voici :

$$\frac{f(a)}{b} + b f_1(u) + b^3 f_2(u) + \ldots.$$

Pour le cas où a diffère peu de $a_{2\mathfrak{a}-1}$, je désigne le coefficient de b dans ce développement par

$$\mathrm{S}\dot{\mathrm{l}}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}},$$

de sorte que l'on trouve

$$(28)\qquad d\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_c = \sum_{\mathfrak{a}} \left[\frac{1}{2} \frac{\mathrm{Q}(a_{2c-1})}{\mathrm{P}'(a_{2c-1})} \frac{\mathrm{P}(x_{\mathfrak{a}})\, dx_{\mathfrak{a}}}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{2c-1})^2 \sqrt{\mathrm{R}(x_{\mathfrak{a}})}} \right],$$

ou bien

$$(29)\qquad d\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_c = \frac{e_{2c-1}^2\, du_c}{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1}} + \sum_{\mathfrak{a}}{}' \left[\frac{e_{2c-1}^2\, e_{2\mathfrak{a}-1}^2\, \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1} (du_c - du_{\mathfrak{a}})}{(a_{2c-1} - a_{2\mathfrak{a}-1})\, \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1}} \right],$$

où il faut exclure, dans cette dernière formule, la valeur c de $\mathfrak{a}$.

Ces n quantités nouvelles $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}}$ sont des fonctions *à sens unique* de u_1, u_2, etc., du même genre que $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, etc. On peut ramener à ces fonctions toutes les intégrales abéliennes de seconde espèce, de même qu'à $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ celles de troisième espèce.

Maintenant je désigne l'intégrale définie

$$(30)\qquad \int_{a_{\mathfrak{a}}}^{-\infty} \frac{1}{2} \frac{\mathrm{Q}(a_{2\mathfrak{a}-1})}{\mathrm{P}'(a_{2\mathfrak{a}-1})} \cdot \frac{\mathrm{P}(x)}{(x - a_{2\mathfrak{a}-1})^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}} \quad \text{par } \overset{\alpha}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}},$$

et je pose (d'une manière analogue comme ci-dessus pour les quantités $\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_{\mathfrak{a}}$),

$$\mathrm{J}_{\mathfrak{a},c} = \overset{2c-1}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}} - \overset{2c}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}}, \quad i\bar{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a},c} = \overset{2c-2}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}} - \overset{2c-1}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}},$$

$$(31)\qquad \mathrm{J}'_{\mathfrak{a},c} = \bar{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a},1} + \bar{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a},2} + \ldots + \bar{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a},c}.$$

Alors la différentielle logarithmique de $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ peut etre exprimée au moyen des fonctions $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}$ de la manière suivante :

$$(32)\qquad \frac{d \log \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{du_{\mathfrak{a}}} = \overset{\alpha}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}} - \mathrm{Sl}(u_1 + \overset{\alpha}{\mathrm{K}}_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{\mathrm{K}}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}} + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{\mathrm{K}}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}.$$

Or on démontre aisément, au moyen de la formule (29), que

$$(33)\qquad \frac{d\mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{\mathrm{K}}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}}{du_c} = \frac{d\mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2c-1}{\mathrm{K}}_1, \ldots)_c}{du_{\mathfrak{a}}},$$

d'où il suit que l'expression

$$\sum_{\mathfrak{a}} \left[-\overset{2\mathfrak{a}-1}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}} - \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{\mathrm{K}}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}} \right] du_{\mathfrak{a}}$$

est une *différentielle exacte*.

Conséquemment, on peut déterminer une fonction $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)$, de telle sorte que

$$(34)\qquad d\log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = -\sum_{\mathfrak{a}} [\overset{2\mathfrak{a}-1}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}} + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{\mathrm{K}}_1, \ldots)]\, du_{\mathfrak{a}},$$

et alors, en posant

$$(34\ bis)\qquad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha} = \frac{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha}}{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)},$$

on obtient

$$(35)\qquad d\log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha} = -\sum_{\mathfrak{a}} [\overset{2\mathfrak{a}-1}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}} - \overset{\alpha}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}} + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}} + \overset{\alpha}{\mathrm{J}}_{\mathfrak{a}}, \ldots)_{\mathfrak{a}}]\, du_{\mathfrak{a}}.$$

Si l'on joint à ces équations la condition que, pour $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots$, $u_n = 0$, il doit être $\mathrm{Al}(u_1, \ldots) = 1$, toutes les fonctions auxiliaires définies par ces équations seront complétement déterminées. En les développant en série suivant les puissances de $u_1, u_2, \ldots$, on obtient

$$(36)\qquad \begin{cases} \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = 1 + (u_1, u_2, \ldots)_2 + (u_1, u_2, \ldots)_4 + \ldots, \\ \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1} = u_{\mathfrak{a}} + (u_1, u_2, \ldots)_3 + (u_1, u_2, \ldots)_5 + \ldots, \\ \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}} = 1 + (u_1, u_2, \ldots)_2 + (u_1, u_2, \ldots)_4 + \ldots, \end{cases}$$

et l'on peut démontrer que ces séries sont convergentes pour *toutes* les valeurs de $u_1, u_2, \ldots$.

On peut maintenant ramener $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)$ et $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}$ à la fonction $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)$, car en posant

$$(37)\qquad w_{\mathfrak{a}} = \int_a^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\mathrm{P}(x)\, dx}{(x - a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$$

et

$$(38)\qquad \frac{d\log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)}{du_{\mathfrak{a}}} = \overset{\mathfrak{a}}{\mathrm{A}}\mathrm{l}(u_1, u_2, \ldots),$$

on obtient

$$(39)\qquad \mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots) = -\sum_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{a}} \overset{\mathfrak{a}}{\mathrm{A}}\mathrm{l}(w_1, \ldots) + \frac{1}{2}\log \frac{\mathrm{Al}(u_1 + w_1, \ldots)}{\mathrm{Al}(u_1 - w_1, \ldots)}.$$

De là on peut déduire encore une formule qui, pour $n = 1$, est très-utile dans la théorie des fonctions elliptiques, et notamment dans les

applications de ces fonctions, savoir :

$$(40)\qquad e^{\sum\limits_a \int_{a_{2a-1}}^{x_a} \frac{1}{2}\left[1+\frac{P(x)}{P(a)}\cdot\frac{\sqrt{R(a)}}{\sqrt{R(x)}}\right]\frac{dx}{x-a}} = e^{-\sum\limits_a u_a \overset{a}{\mathrm{Al}}(w_1,\ldots)}\cdot\frac{\mathrm{Al}(u_1+w_1,\ldots)}{\mathrm{Al}(w_1,\ldots)\,\mathrm{Al}(u_1,\ldots)}.$$

Pour $n=1$ cette relation sert, par exemple, à obtenir facilement les formules au moyen desquelles M. Jacobi a représenté le mouvement de rotation d'un corps solide.

§ V.

Pour représenter effectivement les fonctions $\mathrm{Al}(u_1,\ldots)$, $\mathrm{Al}(u_1,\ldots)_\alpha$, je procède maintenant de la manière suivante.

Je développe en premier lieu la relation

$$(41)\qquad \mathrm{Al}(u_2+2\overset{a}{\mathrm{K}}_1,\ldots) = (-1)^\alpha . e^{-2\sum\limits_a \overset{\alpha}{\mathrm{J}}_a(u_a+\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_a)} . \mathrm{Al}(u_1,\ldots);$$

ensuite, je pose dans cette équation $u_1+2\overset{\beta}{\mathrm{K}}_1$ en place de u_1, etc. Il vient

$$\mathrm{Al}(u_1+2\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_1+2\overset{\beta}{\mathrm{K}}_1,\ldots)_\alpha = (-1)^{\alpha+\beta} e^{-2\sum\limits_a[(\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_a+\overset{\beta}{\mathrm{J}}_a)(u_a+\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_a+\overset{\beta}{\mathrm{K}}_a)+\overset{\beta}{\mathrm{K}}_a\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_a-\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_a\overset{\beta}{\mathrm{J}}_a]} . \mathrm{Al}(u_1,\ldots).$$

En échangeant l'un contre l'autre α et β, on trouve qu'il doit être

$$e^{2\sum\limits_a(\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_a\overset{\beta}{\mathrm{J}}_a-\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_a\overset{\beta}{\mathrm{K}}_a)} = e^{-\sum\limits_a(\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_a\overset{\beta}{\mathrm{J}}_a-\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_a\overset{\beta}{\mathrm{K}}_a)}.$$

d'où il suit que

$$\sum_a(\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_a\overset{\beta}{\mathrm{J}}_a-\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_a\overset{\beta}{\mathrm{K}}_a) = \mu\frac{1}{2}\pi i,$$

où μ est un nombre entier. En effet, je trouve, au moyen d'une discussion directe des intégrales définies représentées par $\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_a$, $\overset{\beta}{\mathrm{K}}_a$, $\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_a$, $\overset{\beta}{\mathrm{J}}_a$, que

$$(42)\qquad \sum_a(\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_a\overset{\beta}{\mathrm{J}}_a-\overset{\alpha}{\mathrm{J}}_a\overset{\beta}{\mathrm{K}}_a) = \begin{cases} +\frac{1}{2}\pi i, & \text{pour } \alpha>\beta,\\ -\frac{1}{2}\pi i, & \text{pour } \alpha<\beta.\end{cases}$$

De cette relation je déduis ensuite les suivantes :

$$(43)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha} (K_{\alpha,c} J_{\alpha,c'} - J_{\alpha,c} K_{\alpha,c'}) = 0, \\ \sum\limits_{\alpha} (K'_{\alpha,c} J'_{\alpha,c'} - J'_{\alpha,c} K'_{\alpha,c'}) = 0, \\ \sum\limits_{\alpha} (K_{\alpha,c} J'_{\alpha,c'} - J_{\alpha,c} K'_{\alpha,c'}) = 0, \text{ pour } c' \gtrless c, \\ \sum\limits_{\alpha} (K_{\alpha,c} J'_{\alpha,c} - J_{\alpha,c} K'_{\alpha,c}) = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

Ces relations, qui sont au nombre de $(2n-1)n$, correspondent à l'équation connue de Legendre entre les intégrales elliptiques entières de première et de seconde espèce. J'en ai publié la démonstration dans un Programme (Braunsberg, 1849), et j'ai donné en même temps, dans ce Mémoire, quelques notices préalables sur les résultats que j'avais obtenus relativement à la théorie des fonctions abéliennes. J'annonçai alors que je me proposais de développer ces résultats dans un travail étendu; mais une maladie, qui m'a rendu impossible, pendant plusieurs années, toute espèce de travail, m'a empêché jusqu'à présent d'exécuter ce projet.

Au moyen des relations proposées, on déduit actuellement de l'équation (41) deux équations plus générales; car posons de nouveau

$$\omega_\alpha = m_1 K_{\alpha,1} + m_2 K_{\alpha,2} + \ldots + m_n K_{\alpha,n},$$
$$\omega'_\alpha = n_1 K'_{\alpha,1} + n_2 K'_{\alpha,2} + \ldots + n_n K'_{\alpha,n},$$

et

$$(44)\quad \begin{cases} \varepsilon_\alpha = m_1 J_{\alpha,1} + m_2 J_{\alpha,2} + \ldots + m_n J_{\alpha,n}, \\ \varepsilon'_\alpha = n_1 J'_{\alpha,1} + n_2 J'_{\alpha,2} + \ldots + n_n J'_{\alpha,n}, \end{cases}$$

(en désignant par $m_1, m_2, \ldots, n_1, n_2, \ldots$ des nombres entiers quelconques); on aura

$$(45)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u_1 + 2\omega_1, \ldots) = e^{-2\sum\limits_{\alpha} \varepsilon_\alpha (u_\alpha + \omega_\alpha)} . \mathrm{Al}(u_1, \ldots); \\ \mathrm{Al}(u_1 + 2\omega'_1 i, \ldots) = e^{-2\sum\limits_{\alpha} \varepsilon'_\alpha (u_\alpha + \omega'_\alpha i) i} . \mathrm{Al}(u_1, \ldots); \end{cases}$$

et, au moyen de l'équation (17), on obtient des formules semblables pour $\mathrm{A}\,1\,(u_1,\ldots)_\alpha$.

J'introduis maintenant, en place de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n nouvelles variables, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ au moyen des relations

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi}(\mathrm{K}_{1,1}\,v_1 + \mathrm{K}_{1,2}\,v_2 + \ldots + \mathrm{K}_{1,n}\,v_n),\\ u_2 &= \frac{1}{\pi}(\mathrm{K}_{2,1}\,v_1 + \mathrm{K}_{2,2}\,v_2 + \ldots + \mathrm{K}_{2,n}\,v_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_n &= \frac{1}{\pi}(\mathrm{K}_{n,1}\,v_1 + \mathrm{K}_{n,2}\,v_2 + \ldots + \mathrm{K}_{n,n}\,v_n). \end{aligned}\right.$$

Que les valeurs des v déduites de ces relations soient :

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} v_1 &= (\mathrm{G}_{1,1}\,u_1 + \mathrm{G}_{2,1}\,u_2 + \ldots + \mathrm{G}_{n,1}\,u_n)\,\pi,\\ v_2 &= (\mathrm{G}_{1,2}\,u_1 + \mathrm{G}_{2,2}\,u_2 + \ldots + \mathrm{G}_{n,2}\,u_n)\,\pi,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ v_n &= (\mathrm{G}_{1,n}\,u_1 + \mathrm{G}_{2,n}\,u_2 + \ldots + \mathrm{G}_{n,n}\,u_n)\,\pi. \end{aligned}\right.$$

Je tire ensuite des équations (43) les suivantes :

$$(48)\qquad \sum_{c} \mathrm{G}_{\mathfrak{a},c}\,\mathrm{J}_{\mathfrak{a}',c} = \sum_{c} \mathrm{G}_{\mathfrak{a}',c}\,\mathrm{J}_{\mathfrak{a},c},$$

$$(49)\qquad \sum_{\mathfrak{a}} \mathrm{G}_{\mathfrak{a},c}\,\mathrm{K}'_{\mathfrak{a},c'} = \sum_{\mathfrak{a}} \mathrm{G}_{\mathfrak{a},c'}\,\mathrm{K}'_{\mathfrak{a},c},$$

de sorte que, si l'on pose

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_{\mathfrak{a},c} &= \sum_{c'} \mathrm{G}_{\mathfrak{a},c'}\,\mathrm{J}_{c,c'},\\ \delta_{\mathfrak{a},c} &= \sum_{c'} \mathrm{G}_{c',\mathfrak{a}}\,\mathrm{K}'_{c',c}\,.\,\pi,\\ \sigma_{\mathfrak{a},c} &= \mathrm{G}_{\mathfrak{a},c}\,.\,\pi, \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(51)\qquad \varepsilon_{\mathfrak{a},c} = \varepsilon_{c,\mathfrak{a}}, \quad \delta_{\mathfrak{a},c} = \delta_{c,\mathfrak{a}},$$

et les relations ci-dessus donnent :

$$(52)\quad \begin{cases} J_{a,c} = \sum\limits_{c'} \varepsilon_{a,c'} K_{c',c}, \\ J'_{a,c} = \frac{1}{2}\sigma_{a,c} + \sum\limits_{c} \varepsilon_{a\ c'} K'_{c',c}, \\ K'_{a,c} = \frac{1}{\pi}\sum\limits_{c'} \delta_{a,c'} K_{c',c}. \end{cases}$$

Si l'on forme ensuite les fonctions homogènes du second degré de $u_1, u_2, \ldots$,

$$E(u_1, u_2, \ldots) = \frac{1}{2}\sum_{a,c} \varepsilon_{a,c}\, u_a u_c,$$

on peut montrer, à l'aide des équations précédentes, que

$$(53)\qquad E(u_1 + 2\omega_1, \ldots) = E(u_1, \ldots) + 2\sum_a \varepsilon_a (u_a + \omega_a).$$

De là il suit, en vertu de la première des équations (45), si l'on pose

$$(54)\qquad g\,.\,e^{E(u_1, u_2, \ldots)} Al(u_1, u_2, \ldots) = Jc(v_1, v_2, \ldots),$$

où g représente une constante,

$$(55)\qquad Jc(v_1 + 2m_1\pi,\ v_2 + 2m_2\pi, \ldots) = Jc(v_1, v_2, \ldots).$$

J'appelle cette fonction de $v_1, v_2, \ldots$, *fonction de Jacobi*, parce que c'est ce géomètre qui l'a introduite dans l'analyse pour $n = 1$. Conformément à ce nom, j'ai choisi le symbole Jc. En général, je me propose de justifier, dans mon Mémoire étendu, le choix des symboles adoptés.

La seconde des équations citées, si l'on pose

$$\delta_a = n_1 \delta_{a,1} + n_2 \delta_{a,2} + \ldots + n_n \delta_{a,n},$$

donne

$$(56)\quad Jc(v_1 + \delta_1 i,\ v_2 + \delta_2 i, \ldots) = e^{-2\sum\limits_a n_a (v_a + \delta_a i) i}\, Jc(v_1, v_2, \ldots).$$

Maintenant on peut démontrer que toute fonction qui jouit de la propriété (55), *et qui présente, en outre,* comme $Jc(v_1, \ldots)$, *le caractère d'une fonction entière,* tel que je viens de le définir, peut être

représentée par une série infinie, convergente non-seulement pour les valeurs réelles, mais aussi pour toutes les valeurs imaginaires de v_1, $v_2, \ldots$, et de la forme

$$S\left[A_{\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_n} e^{(\mathfrak{n}_1 v_1 + \mathfrak{n}_2 v_2 + \ldots + \mathfrak{n}_n v_n) i}\right],$$

où $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_n$ représentent des nombres entiers variables dont chacun doit, indépendamment des autres, parcourir toutes les valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Pour la fonction Jc, c'est l'équation (56) qui sert à la détermination des coefficients, et l'on obtient

$$(57) \quad \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots) = S\left\{e^{[\mathfrak{n}_1(v_1 + \delta_1 i) + \mathfrak{n}_2(v_2 + \delta_2 i) + \ldots + \mathfrak{n}_n(v_n + \delta_n i)] i}\right\},$$

ou bien

$$(58) \quad \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots) = S\left[e^{-\sum\limits_{a,c} \mathfrak{n}_a \mathfrak{n}_c \delta_{a,c}} \cos(\mathfrak{n}_1 v_1 + \mathfrak{n}_2 v_2 + \ldots + \mathfrak{n}_n v_n)\right].$$

Proprement, le second membre devrait encore être multiplié par une constante arbitraire, mais celle-ci peut être supprimée à cause de la quantité arbitraire g. Le coefficient g de la relation (54) est déterminé par la condition que, pour $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots$, $u_n = 0$, on doit avoir $\mathrm{Al}(u_1, \ldots) = 1$. D'après cela, on trouve

$$(59) \qquad \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = e^{-\mathrm{E}(u_1, u_2, \ldots)} \cdot \frac{\mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots)}{\mathrm{Jc}(0, 0, \ldots)},$$

$$v_a = \sum_c \sigma_{c,a} u_c.$$

Pour les fonctions $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ on obtient ensuite, au moyen des équations (35), les expressions suivantes. Soit

$$\begin{aligned} \overset{\alpha}{\mathrm{K}}_a = {} & \mu_1 \mathrm{K}_{a,1} + \mu_2 \mathrm{K}_{a,2} + \ldots + \mu_n \mathrm{K}_{a,n} \\ & - (\nu_1 \mathrm{K}'_{a,1} + \nu_2 \mathrm{K}'_{a,2} + \ldots + \nu_n \mathrm{K}'_{a,n}) i, \end{aligned}$$

où chacun des nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots$ sera $= 1$ ou $= 0$, et déterminé au moyen des formules. Soit, en outre,

$$\delta_a = \nu_1 \delta_{a,1} + \nu_2 \delta_{a,2} + \ldots + \nu_n \delta_{a,n},$$

il sera

$$(60)\qquad e^{E(u_1,u_2,\ldots)}\,\mathrm{Al}(u_1,u_2,\ldots)_\alpha = \frac{e^{\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}^{\alpha}\nu_{\mathfrak{a}}(\nu_{\mathfrak{a}}-\mu_{\mathfrak{a}}\pi+\frac{1}{2}\delta_{\mathfrak{a}}i)\,i}\,\mathrm{Jc}(\nu_1-\mu_1\pi+\delta_1 i,\ldots)}{\mathrm{Jc}(0,0,\ldots)}.$$

Mais, en posant $\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\ldots+\mu_n\nu_n=\lambda$, on a :

1°. *Pour* λ *impair*,

$$(61)\left\{\begin{aligned}&(-1)^{\frac{1}{2}(1-\lambda)}\,e^{\frac{1}{2}\sum\nu_{\mathfrak{a}}(\nu_{\mathfrak{a}}-\mu_{\mathfrak{a}}\pi+\frac{1}{2}\delta_{\mathfrak{a}}i)\,i}\,\mathrm{Jc}(\nu_1-\mu_1\pi+\delta_1 i,\ldots)\\ &=\mathrm{S}\left\{(-1)^{\mu_1\mathfrak{n}_1+\ldots+\mu_n\mathfrak{n}_n}\,e^{-\sum_{\mathfrak{a},c}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{a}}+\frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{a}})(\mathfrak{n}_c+\frac{1}{2}\nu_c)\delta_{\mathfrak{a},c}}.\sin\left[(\mathfrak{n}_1+\tfrac{1}{2}\nu_1)\nu_1+\ldots\right]\right\};\end{aligned}\right.$$

2°. *Pour* λ *pair*,

$$(62)\left\{\begin{aligned}&(-1)^{\frac{1}{2}\lambda}\,e^{\frac{1}{2}\sum\nu_{\mathfrak{a}}(\nu_{\mathfrak{a}}-\mu_{\mathfrak{a}}\pi+\frac{1}{2}\delta_{\mathfrak{a}}i)\,i}\,\mathrm{Jc}(\nu_1-\mu_1\pi+\delta_1 i,\ldots)\\ &=\mathrm{S}\left\{(-1)^{\mu_1\mathfrak{n}_1+\ldots+\mu_n\mathfrak{n}_n}\,e^{-\sum_{\mathfrak{a},c}(\mathfrak{n}_{\mathfrak{a}}+\frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{a}})(\mathfrak{n}_c+\frac{1}{2}\nu_c)\delta_{\mathfrak{a},c}}.\cos\left[(\mathfrak{n}_1+\tfrac{1}{2}\nu_1)\nu_1+\ldots\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose, en outre,

$$\mathrm{al}(u_1,u_2,\ldots)_{\alpha,\beta}=\frac{\mathrm{Al}(u_1,u_2,\ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{Al}(u_1,u_2,\ldots)},$$

le second membre de l'équation (60) fournit la valeur de

$$e^{E(u_1,\ldots)}\,\mathrm{Al}(u_1,\ldots)_{\alpha,\beta};$$

lorsqu'on pose pour chacun des nombres μ_1, ν_1, μ_2, ν_2, etc., la *somme* des deux valeurs qu'il prend pour α et pour β.

Si en place de ν_1, ν_2, etc., on introduit de nouveau u_1, u_2, etc., on obtient encore les expressions remarquables suivantes.

Soit

$$\overset{\alpha}{\mathrm{K}}_{\mathfrak{a}}=\overset{\alpha}{\omega}_{\mathfrak{a}}-i\,\overset{\alpha}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}},$$

où

$$\overset{0}{\omega}_{\mathfrak{a}}=\overset{1}{\omega}_{\mathfrak{a}}=\overset{2}{\omega}_{\mathfrak{a}}=\overset{3}{\omega}_{\mathfrak{a}},\ldots,\quad \overset{2n-2}{\omega}_{\mathfrak{a}}=\overset{2n-1}{\omega}_{\mathfrak{a}},\quad \overset{2n}{\omega}_{\mathfrak{a}}=0,$$

$$\overset{0}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}}=0,\quad \overset{1}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}}=\overset{2}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}},\quad \overset{3}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}}=\overset{4}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}},\ldots,\quad \overset{2n-1}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}}=\overset{2n}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}},$$

$$\overset{2c-1}{\omega}_{\mathfrak{a}}=\mathrm{K}_{\mathfrak{a},c}+\mathrm{K}_{\mathfrak{a},c+1}+\ldots+\mathrm{K}_{\mathfrak{a},n},$$

$$\overset{2c}{\omega}{}'_{\mathfrak{a}}=\mathrm{K}'_{\mathfrak{a},c};$$

soit, en outre,

$$\sigma_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{n}_1 \sigma_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{n}_2 \sigma_{\mathfrak{a},2} + \ldots + \mathfrak{n}_n \sigma_{\mathfrak{a},n},$$

$$\omega'_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{n}_1 K'_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{n}_2 K'_{\mathfrak{a},2} + \ldots + \mathfrak{n}_n K'_{\mathfrak{a},n},$$

il sera

$$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = \frac{S\left\{e^{-\sum_{\mathfrak{a}}\left(\sigma_{\mathfrak{a}} + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{\sigma}_{\mathfrak{a}}\right)\left(\omega'_{\mathfrak{a}} + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{\omega}'_{\mathfrak{a}}\right)} \cdot \cos\left[\sum\left(\sigma_{\mathfrak{a}} + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{\sigma}_{\mathfrak{a}}\right)\left(u_{\mathfrak{a}} - \overset{\alpha}{\omega}_{\mathfrak{a}}\right)\right]\right\}}{S\left(e^{-\sum_{\mathfrak{a}} \sigma_{\mathfrak{a}} \omega'_{\mathfrak{a}}} \cdot \cos \sum \sigma_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{a}}\right)}.$$

Le signe S se rapporte encore aux nombres $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, etc., contenus dans les expressions $\sigma_{\mathfrak{a}}$, $\omega'_{\mathfrak{a}}$; mais $\overset{\alpha}{\sigma}_{\mathfrak{a}}$ représente la valeur de $\sigma_{\mathfrak{a}}$ qu'on obtient en prenant pour $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, etc. les valeurs qui font

$$\omega'_{\mathfrak{a}} = \overset{\alpha}{\omega}'_{\mathfrak{a}}.$$

Et si, dans l'expression ci-dessus, on remplace $\overset{\alpha}{\sigma}_{\mathfrak{a}}$, $\overset{\alpha}{\omega}_{\mathfrak{a}}$, $\overset{\alpha}{\omega}'_{\mathfrak{a}}$ par les sommes

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{\mathfrak{a}} + \overset{\beta}{\sigma}_{\mathfrak{a}}, \quad \overset{\alpha}{\omega}_{\mathfrak{a}} + \overset{\beta}{\omega}_{\mathfrak{a}}, \quad \overset{\alpha}{\omega}'_{\mathfrak{a}} + \overset{\beta}{\omega}'_{\mathfrak{a}},$$

elle représente la fonction $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$.

Il existe encore un nombre infini de représentations des fonctions abéliennes semblables à celles qu'on vient de donner. Il y en a une notamment (de même que pour les fonctions elliptiques) où les fonctions *cycliques* sin, cos sont remplacées par les fonctions *hyperboliques* correspondantes. Puis, j'ai aussi développé, dans mon Mémoire, comment toute expression formée rationnellement de fonctions abéliennes peut être représentée comme le quotient de deux séries d'une forme tout à fait semblable, considération qui prépare en même temps la *transformation des fonctions abéliennes*.

Westerkotten (Saline, en Westphalie), 11 septembre 1853.

Nota. Les derniers résultats du Mémoire précédent ont été déjà énoncés dans un Programme public par le même auteur et daté du 17 juillet 1849.

NOTE

SUR

LES FONCTIONS SEMBLABLES DES RACINES D'UNE ÉQUATION,

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta$ les racines d'une équation et $F(\alpha, \beta, \gamma \ldots, \theta)$, $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta)$ deux fonctions rationnelles de ces racines. Supposons que ces fonctions soient telles que toute substitution qui change la valeur algébrique de $f(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ change aussi celle de $F(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$, ou, ce qui revient au même, que les substitutions qui laissent la fonction $F(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ invariable ne produisent non plus aucun changement sur la fonction $f(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$. Puis désignons par $F_1, F_2, \ldots, F_n$ toutes les valeurs distinctes que prend la fonction $F(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ quand on y permute les lettres qu'elle renferme, et par $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les valeurs correspondantes de la fonction $f(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$. Supposons, enfin, les indices tellement arrangés que les m premières expressions, savoir, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ soient toutes les valeurs *distinctes* que prend la fonction $f(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ quand on y permute les lettres $\alpha, \beta, \ldots, \theta$. Cela posé, le produit

$$(1) \qquad (x + F_1 \cdot y - f_1)(x + F_2 \cdot y - f_2) \ldots (x + F_n \cdot y - f_n)$$

sera une fonction entière des variables x et y dont les coefficients pourront s'exprimer rationnellement par les coefficients de l'équation donnée. Pareillement, le produit

$$(2) \qquad (x + F_1 \cdot y - f_1)(x + F_1 \cdot y - f_2) \ldots (x + F_1 \cdot y - f_m)$$

sera une fonction entière de la quantité $(x + F_1 \cdot y)$ dont les coefficients pourront s'exprimer rationnellement par les coefficients de l'équation donnée. Désignons donc par $\varphi(x, y)$ le produit (1) et par

$\psi(x+F_1.y)$ le produit (2), et cherchons le plus grand commun diviseur des deux fonctions $\varphi(x,y)$ et $\psi(x+F_1.y)$, en les considérant comme fonctions de la variable x seule. On trouvera ainsi une fonction entière de x et y dont les coefficients s'exprimeront rationnellement par F_1 et par les coefficients de l'équation donnée. Soit donc $X(F_1, x, y)$ cette fonction où nous pourrons supposer le coefficient de la plus haute puissance de x égal à 1. Cela posé, la fonction $X(F_1, x, y)$ sera évidemment égale au produit de tous les facteurs linéaires communs aux deux fonctions $\varphi(x,y)$ et $\psi(x+F_1.y)$. On aura, par suite, l'équation

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} X(F_1, x, y) &= (x+F_1.y-f_1)(x+F_a.y-f_a)\\ &\quad\times(x+F_b.y-f_b)\ldots(x+F_k.y-f_k),\end{aligned}\right.$$

$a, b, \ldots, k$ désignant tous les indices pour lesquels les valeurs *numériques* de $F_a, F_b, \ldots, F_k$ sont égales à celles de F_1, quoique $f_1, f_a, f_b, \ldots, f_k$ soient distinctes quant à la forme algébrique. Cette équation fait voir, en y faisant $y=0$, que f_1 dépend d'une équation dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction de F_1 et des coefficients de l'équation donnée, et dont le degré est égal au nombre des valeurs numériquement égales $F_1, F_a, F_b, \ldots, F_k$.

Il est visible que tout cela s'applique au cas spécial où les fonctions $F(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ et $f(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ sont des fonctions semblables.

Ensuite, en désignant par r le nombre des racines $\alpha, \beta, \ldots, \theta$, faisons $f_1(\alpha, \beta, \ldots, \theta) = \alpha$ et supposons que la fonction $F(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ soit telle que les $1.2.3\ldots r$ valeurs qu'elle prend quand on y permute les racines, soient toutes différentes. Cela posé, l'équation (3) se réduira à celle-ci :

$$X(F_1, x, y) = x + F_1.y - \alpha;$$

d'où l'on voit qu'on peut exprimer une quelconque des racines α, $\beta, \ldots, \theta$ en fonction rationnelle de F_1 et des coefficients de l'équation donnée.

NOTE SUR LES NOMBRES COMPLEXES;

PAR M. ANGELO GENOCCHI [*].

Soient n un nombre premier impair, r une racine imaginaire de l'équation $r^n = 1$, et considérons le nombre complexe

$$a + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_{n-1} r^{n-1}$$

formé avec des coefficients a_i entiers. Si ce nombre complexe est divisible par $1 - r$, nous pourrons représenter par

$$b_1 r + b_2 r^2 + \ldots + b_{n-1} r^{n-1}$$

le quotient, en supposant $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ entiers, et nous aurons

$$a + b_{n-1} + (a_1 - b_1) r + (a_2 - b_2 + b_1) r^2 + (a_3 - b_3 + b_2) r^3 + \ldots$$
$$+ (a_{n-1} - b_{n-1} + b_{n-2}) r^{n-1} = 0;$$

d'où, en vertu de l'équation irréductible

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = 0,$$

on déduira

$$a + b_{n-1} = k, \quad a_1 - b_1 = k, \quad a_2 - b_2 + b_1 = k, \ldots,$$
$$a_{n-1} - b_{n-1} + b_{n-2} = k.$$

k étant un entier, et, par conséquent,

$$a + b_{n-1} = k, \quad b_1 = a_1 - k, \quad b_2 = a_1 + a_2 - 2k,$$
$$b_3 = a_1 + a_2 + a_3 - 3k, \ldots,$$
$$b_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i - ik, \ldots,$$
$$b_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - (n-1)k.$$

[*] Il y a très-longtemps que cette Note m'a été adressée et qu'elle aurait dû être imprimée. L'auteur a depuis publié des recherches plus étendues sur la théorie des nombres. Je crois pourtant que le présent article peut encore aujourd'hui être mis utilement sous les yeux du lecteur. (J. LIOUVILLE.)

La première et la dernière de ces équations donnent

$$k = \frac{a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n},$$

et, k étant ainsi déterminé, les autres équations détermineront tous les coefficients b_i. On voit donc que la condition nécessaire et suffisante pour que le nombre complexe proposé soit divisible par $1 - r$, est que la somme

$$a + a_1 + \ldots + a_{n-1}$$

de ses coefficients soit divisible par n; théorème connu.

Supposons que chaque coefficient a_i soit formé d'après cette loi,

$$a_i = h\frac{i}{1} + h_1\frac{i(i+1)}{1.2} + h_2\frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ h_m\frac{i(i+1)\ldots(i+m)}{1.2\ldots(m+1)} - \frac{i(i+1)\ldots(i+m+1)}{1.2\ldots(m+2)},$$

h, h_1, h_2,..... h_m étant des nombres entiers constants. On aura

$$a = 0,$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_i = h\frac{i(i+1)}{1.2} + h_1\frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ h_m\frac{i(i+1)\ldots(i+m+1)}{1.2\ldots(m+2)} - \frac{i(i+1)\ldots(i+m+2)}{1.2\ldots(m+3)},$$

et, en faisant $i = n - 1$, on verra que le second membre de cette équation aura tous ses termes divisibles par n tant que $m + 3$ sera $< n$: donc, si m est $< n - 3$, la somme

$$a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

sera divisible par n, et le nombre complexe

$$a + a_1 r + \ldots + a_{n-1} r^{n-1}$$

le sera par $1 - r$. De plus, les coefficients b_i du quotient suivront la même loi que les coefficients a_i, car

$$b_i = -k\frac{i}{1} + a_1 + a_2 + \ldots + a_i;$$

mais m dans b_i sera changé en $m + 1$. En traitant de même ce quo-

tient, et ainsi de suite, on verra que le nombre complexe primitif est divisible par la puissance $(1-r)^{n-m-3}$.

Prenons $m = n - 4$, la formule

$$b_i = -k\frac{i}{1} + h\frac{i(i+1)}{1.2} + h_1\frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ h_m\frac{i(i+1)(i+2)\ldots(i+m+1)}{1.2.3\ldots(m+2)} - \frac{i(i+1)\ldots(i+m+2}{1.2\ldots(m+3)}$$

donne

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_i = -k\frac{i(i+1)}{1.2} + h\frac{i(i+1)(i+3}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ h_m\frac{i(i+1)\ldots(i+m+2)}{1.2\ldots(m+3)} - \frac{i(i+1)\ldots(i+m+3)}{1.2\ldots(m+4)},$$

et, par suite,

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = -k\frac{(n-1)n}{1.2} + h\frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ h_m\frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+m+1)}{1.2.3\ldots(m+3)} - \frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+m+2)}{1.2.3\ldots(m+4)},$$

dont tous les termes, excepté le dernier, sont divisibles par n; quant au dernier, il devient

$$-\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m+2)}{1.2.3\ldots(n-2)},$$

et puisqu'on a

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+m+2) = Qn + 1.2.3\ldots(m+2),$$

Q étant entier, et que

$$m + 2 = n - 2,$$

on conclut

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} \equiv -1 \pmod{n}.$$

On déduit de là ce théorème :

Que le nombre complexe primitif est divisible par $(1-r)^{n-m-3}$, et que la somme des coefficients du quotient étant augmentée de l'unité est divisible par n.

Je ferai quelques applications de ces résultats.

1°. Si l'on prend

$$a = n, \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0,$$

il vient

$$\frac{n}{1-r} = -r - 2r^2 - 3r^3 - \ldots - (n-1)r^{n-1};$$

puis, en prenant

$$a = 0, \quad a_i = -i, \quad k = \frac{n-1}{2},$$

on a

$$\frac{n}{(1-r)^2} = (k-1)r + (2k-3)r^2 + (3k-6)r^3 + \ldots$$
$$+ \left[(n-1)k - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\right] r^{n-1},$$

et, dans ce quotient, le coefficient de r^i est $ik - \frac{i(i+1)}{1.2}$, ce qui rentre dans la loi générale ci-dessus indiquée, pourvu qu'on suppose $m = 0$, $h = k$. En conséquence, ce dernier nombre complexe sera divisible par $(1-r)^{n-3}$, et la somme des coefficients du quotient $\frac{n}{(1-r)^{n-1}}$, étant augmentée de l'unité, sera divisible par n.

Or on a

$$n = (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots(1-r^{n-1}),$$

et, par suite,

$$\frac{n}{(1-r)^{n-1}} = 1 \cdot \frac{1-r^2}{1-r} \cdot \frac{1-r^3}{1-r} \cdots \frac{1-r^{n-1}}{1-r};$$

de plus

$$\frac{1-r^i}{1-r} = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{i-1},$$

nombre complexe dont la somme des coefficients est i; de sorte que cette somme, dans le nombre complexe $\frac{n}{(1-r)^{n-1}}$, sera égale au produit $1.2.3\ldots(n-1)$. Il en résulte donc le théorème de Wilson, savoir, que le produit $1.2.3\ldots(n-1)$ augmenté de l'unité est divisible par n.

2°. En désignant par m un nombre entier non divisible par n, on peut changer r en r^m, et poser

$$n = (1-r^m)(1-r^{2m})\ldots(1-r^{(n-1)m}),$$

d'où

$$\frac{(1-r^m)(1-r^{2m})\ldots(1-r^{(n-1)m})}{(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{n-1})} - 1 = \frac{n}{n} - 1 = 0.$$

Maintenant, si l'on regarde le premier membre de cette équation comme un nombre complexe divisible par $1-r$, on devra conclure que la somme de ses coefficients est divisible par n. Mais dans

$$\frac{1-r^{im}}{1-r^i} = 1 + r^i + r^{2i} + \ldots + r^{(m-1)i}$$

la somme des coefficients est toujours m; et, par suite, cette somme, dans le premier membre en question, est $m^{n-1} - 1$. Donc $m^{n-1} - 1$ est divisible par n; théorème de Fermat.

3°. Remplaçons r par r^2, $1 - r^{2i}$ par $-r^i(r^i - r^{-i})$; puisqu'on a

$$(-1)^{n-1} = 1, \quad r^{\frac{n(n-1)}{2}} = r^{m\cdot\frac{n(n-1)}{2}} = 1,$$

il viendra

$$\frac{(r^m - r^{-m})(r^{2m} - r^{-2m})\ldots(r^{(n-1)m} - r^{-(n-1)m})}{(r - r^{-1})(r^2 - r^{-2})\ldots(r^{n-1} - r^{-n+1})} = 1.$$

Posons

$$k = \frac{n-1}{2}, \quad \varphi(r) = \frac{(r^m - r^{-m})(r^{2m} - r^{-2m})\ldots(r^{km} - r^{-km})}{(r - r^{-1})(r^2 - r^{-2})\ldots(r^k - r^{-k})};$$

évidemment

$$\varphi(r^{-1}) = \varphi(r);$$

mais, en observant que

$$(r^{-1})^i = r^{n-i}, \quad (r^{-1})^{-i} = r^{-n+i}, \quad (r^{-1})^{im} = r^{(n-i)m}, \quad (r^{-1})^{-im} = r^{-(n-i)m},$$

et

$$n - k = k + 1,$$

on aura aussi

$$\varphi(r^{-1}) = \frac{(r^{(n-1)m} - r^{-(n-1)m})(r^{(n-2)m} - r^{-(n-2)m})\ldots(r^{(k+1)m} - r^{-(k+1)m})}{(r^{n-1} - r^{-n+1})(r^{n-2} - r^{-n+2})\ldots(r^{k+1} - r^{-k-1})},$$

et de là

$$\varphi(r)\varphi(r^{-1}) = 1:$$

il s'ensuit

$$[\varphi(r)]^2 = 1, \quad \varphi(r) = \pm 1.$$

Désignons par ε cette valeur de $\varphi(r)$, dans le nombre complexe $\varphi(r) - \varepsilon$ la somme des coefficients sera divisible par n, et comme, en général, dans

$$\frac{r^{im} - r^{-im}}{r^i - r^{-i}} = r^{-i(m-1)} \cdot \frac{r^{2im} - 1}{r^{2i} - 1}$$
$$= r^{(m-1)(n-i)} \left(r^{2i(m-1)} + r^{2i(m-2)} + \ldots + r^{2i} + 1\right)$$

la somme des coefficients est m, et que, par suite, elle est m^k dans $\varphi(r)$, on conclura que $m^k - \varepsilon$ est divisible par n. On a donc

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \varepsilon,$$

en employant la notation de Legendre, ce qui donne la formule

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{(r^m - r^{-m})(r^{2m} - r^{-2m})\ldots(r^{km} - r^{-km})}{(r - r^{-1})(r^2 - r^{-2})\ldots(r^k - r^{-k})}.$$

Soit $m = 2$, et remarquons que si i est pair, on a

$$(-1)^i (r^i - r^{-i}) = r^i - r^{-i},$$

et si i est impair, on a

$$(-1)^i (r^i - r^{-i}) = r^{-i} - r^i = r^{n-i} - r^{-n+i};$$

observons de plus que, dans ce dernier cas, $n - i$ sera pair, et plus grand que k si i est $< k$. En posant successivement $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, en multipliant entre eux les résultats, et se rappelant l'équation

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

on obtiendra

$$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} (r - r^{-1})(r^2 - r^{-2})(r^3 - r^{-3})\ldots(r^k - r^{-k})$$
$$= (r^2 - r^{-2})(r^4 - r^{-4})(r^6 - r^{-6})\ldots(r^{2k} - r^{-2k});$$

d'où, en vertu de la formule précédente, on tire

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}.$$

La même formule dispense de recourir au lemme de M. Gauss dans

la démonstration que M. Liouville a donnée de la loi de réciprocité de Legendre. Mais elle conduit aussi immédiatement à cette loi à l'aide d'une simple transformation, indiquée aussi par M. Liouville. En effet, soient m un nombre premier impair, q une racine imaginaire de l'équation

$$q^m = 1,$$

et faisons

$$h = \frac{m-1}{2}:$$

nous aurons

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{(q^n - q^{-n})(q^{2n} - q^{-2n})\ldots(q^{hn} - q^{-hn})}{(q - q^{-1})(q^2 - q^{-2})\ldots(q^h - q^{-h})}:$$

on a de plus, en général,

$$\begin{aligned}\frac{A^n - B^n}{A - B} &= (Ar - Br^{-1})(Ar^2 - Br^{-2})\ldots \\ &\quad \times (Ar^{n-2} - Br^{-n+2})(Ar^{n-1} - Br^{-n+1}),\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{A^n - B^n}{A - B} &= (Ar - Br^{-1})(Ar^2 - Br^{-2})\ldots(Ar^h - Br^{-h}) \\ &\quad \times (Ar^{-1} - Br)(Ar^{-2} - Br^2)\ldots(Ar^{-h} - Br^h),\end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned}\frac{A^m - B^m}{A - B} &= (Aq - Bq^{-1})(Aq^2 - Bq^{-2})\ldots(Aq^h - Bq^{-h}) \\ &\quad \times (Aq^{-1} - Bq)(Aq^{-2} - Bq^2)\ldots(Aq^{-h} - Bq^h).\end{aligned}$$

En assignant à A, dans la première de ces deux équations, toutes les valeurs $q, q^2, \ldots, q^h$, et dans la deuxième toutes les valeurs $r, r^2, \ldots, r^h$; et prenant $B = A^{-1}$; puis en substituant dans les expressions de $\left(\frac{n}{m}\right)$ et $\left(\frac{m}{n}\right)$, on trouvera aisément

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{hk}\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{m}\right).$$

J'indiquerai une autre forme qu'on peut donner à la démonstration de M. Liouville. Soit g une racine primitive de la congruence

$$x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n},$$

et soit

$$m \equiv g^{\lambda} \pmod{n},$$

λ étant $< n-1$: dans la suite $1+\lambda$, $2+\lambda$, $3+\lambda, \ldots$, $k+\lambda$ le nombre des termes compris entre k et $2k$ sera λ si $\lambda < k$, sera $2k-\lambda$ si $\lambda > k$ Mais on aura

$$g^{k+i} \equiv -g^i, \quad g^{2k+i} \equiv g^i,$$

et, par suite,

$$r^{g^{k+i}} = r^{-g^i}, \quad r^{g^{2k+i}} = r^{g^i},$$

d'où il est facile de déduire

$$\begin{aligned}&\left(r^{g^{1+\lambda}} - r^{-g^{1+\lambda}}\right)\left(r^{g^{2+\lambda}} - r^{-g^{2+\lambda}}\right)\ldots\left(r^{g^{k+\lambda}} - r^{-g^{k+\lambda}}\right)\\ &= (-1)^\lambda . \left(r^g - r^{-g}\right)\left(r^{g^2} - r^{-g^2}\right)\ldots\left(r^{g^k} - r^{-g^k}\right),\end{aligned}$$

et comme

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^\lambda, \quad g^{i+\lambda} \equiv mg^i \ (\text{mod. } n), \quad r^{g^{i+\lambda}} = r^{mg^i},$$

on en tirera

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\left(r^{mg} - r^{-mg}\right)\left(r^{mg^2} - r^{-mg^2}\right)\ldots\left(r^{mg^k} - r^{-mg^k}\right)}{\left(r^g - r^{-g}\right)\left(r^{g^2} - r^{-g^2}\right)\ldots\left(r^{g^k} - r^{-g^k}\right)}.$$

On aura une formule analogue pour $\left(\frac{n}{m}\right)$ en appelant f une racine primitive de la congruence

$$x^{m-1} \equiv 1 \ (\text{mod. } m),$$

et, à l'aide de décompositions semblables aux précédentes, on démontrera que

$$\Pi\left(\frac{q^{nf^\alpha} - q^{-nf^\alpha}}{q^{f^\alpha} - q^{-f^\alpha}}\right) = (-1)^{hk}\,\Pi\left(\frac{r^{mg^\beta} - r^{-mg^\beta}}{r^{g^\beta} - r^{-g^\beta}}\right),$$

les signes de multiplication Π s'étendant aux valeurs $1, 2, \ldots, h$ de α, et aux valeurs $1, 2, \ldots, k$ de β ; et de ces équations résultera la loi de réciprocité.

On peut aussi se servir de la formule

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{hk}\,\Pi\left(\frac{r^{mg^\beta} - r^{-mg^\beta}}{r^{g^\beta} - r^{-g^\beta}}\right),$$

qu'on obtient en élevant à la puissance h les deux membres de l'équation

$$n = (-1)^k\,\Pi\left(r^{g^\beta} - r^{-g^\beta}\right)^2.$$

DÉMONSTRATION

DE

QUELQUES FORMULES D'UN MÉMOIRE DE M. JACOBI[*];

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

Le Mémoire de Jacobi est extrait d'une Lettre adressée à l'Académie des Sciences de Berlin en 1837. Voici les premières lignes :

« Soit x une racine de l'équation $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$, où p est un nombre » premier. Le nombre g étant une racine primitive de p, si l'on pose

$$F(\alpha) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} \ldots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}}.$$

» où α est une racine quelconque de l'équation $\frac{\alpha^{p-1} - 1}{\alpha - 1} = 0$, on aura

$$F(\alpha) . F(\alpha^{-1}) = \alpha^{\frac{p-1}{2}} . p,$$

$$F(\alpha^m) . F(\alpha^n) = \psi(\alpha) . F(\alpha^{m+n});$$

» $\psi(\alpha)$ sera une fonction entière à coefficients entiers de α. On a, de » plus,

$$\psi(\alpha) . \psi(\alpha^{-1}) = p.$$

» Si r représente une racine primitive de la congruence $r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, » et que l'on mette dans la fonction

$$\psi(r) = \frac{F(r^{-m}) . F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$$

» pour r le nombre g, on aura, m et n étant positifs et plus petits

[*] *Journal de Mathématiques* de M. Crelle, tome XXX, page 166.

que $p-1$,

$$\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi m\ \Pi n} \pmod{p},$$

» où $\Pi m = 1.2.3\ldots m$. Quand on a $m+n > p-1$, $\psi(g)$ est » $\equiv 0 \pmod{p}$. Ce théorème doit être regardé comme un des plus » importants pour les applications. J'ai communiqué ces théorèmes à » M. Gauss depuis plus de dix ans. »

Voici les démonstrations de ces beaux théorèmes, M. Cauchy les a données dans les Notes première et cinquième de son Mémoire sur la Théorie des Nombres. (Ce Mémoire, qui est de 1830, a paru avec des Notes fort étendues dans le tome XVII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1840.) Les démonstrations sont ici réduites à peu de pages, et avec quelques modifications de nature à les simplifier: elles conviendront à un plus grand nombre de lecteurs.

Proposition I. *Le produit* $F(\alpha).F(\alpha^{-1})$ *est toujours égal à* $\alpha^{\frac{p-1}{2}}.p$, α *étant autre que l'unité.*

Démonstration. Ordonnons le produit suivant les puissances de α; d'abord le terme en α^0 sera

$$x^2 + x^{2g} + x^{2g^2} + \ldots + x^{2g^{p-2}}.$$

Or $2, 2g, \ldots, 2g^{p-2}$, en ôtant les multiples de p, se réduisent, à l'ordre près, à

$$2,\ 4,\ 6, \ldots,\ 2(p-1), \quad \text{ou} \quad 1,\ 2, \ldots,\ p-1;$$

mais

$$1 + x + x^2 \ldots + x^{p-1} = 0;$$

le coefficient est donc -1. Le terme en α est

$$(x^{g^0+g^1} + x^{g^1+g^2} + x^{g^2+g^3} \ldots + x^{g^{p-2}+g^0})\,\alpha;$$

si l'on pose

$$g^0 + g^1 = 1 + g = n,$$

il deviendra

$$(x^n + x^{ng} + \ldots + x^{ng^{p-2}})\,\alpha, \quad \text{ou} \quad -\alpha.$$

On en dira autant des autres termes; seulement, dans le multiplicateur

de $\alpha^{\frac{p-1}{2}}$, les exposants $1+g^{\frac{p-1}{2}}$, $g\left(1+g^{\frac{p-1}{2}}\right)$, etc., étant multiples de p, ce multiplicateur deviendra $p-1$, et comme

$$1+\alpha+\ldots+\alpha^{p-2}=\frac{\alpha^{p-1}-1}{\alpha-1}=0,$$

on aura finalement

$$F(\alpha).F(\alpha^{-1})=p\,\alpha^{\frac{p-1}{2}}.$$

Proposition II. *Soient α, β deux racines de $\frac{\alpha^{p-1}-1}{\alpha-1}=0$, et telles qu'on n'ait pas $\alpha\beta=1$, on aura toujours*

$$F(\alpha)\,F(\beta)=F(\alpha\beta).\mathop{S}_{s=1}^{s=p-2}\alpha^{\operatorname{ind} s}(\alpha\beta)^{-\operatorname{ind}(s+1)}.$$

J'ai modifié l'énoncé; celui qui précède montre la formation du facteur $\psi(\alpha)$. On sait que ind s (indice de s) est un entier, tel qu'on a

$$g^{\operatorname{ind} s}\equiv s\ (\text{mod. } p).$$

L'entier s sera supposé positif $<p$, et autre que zéro. Le *Canon arithmeticus* de Jacobi donne ces indices pour tous les modules premiers inférieurs à 1 000.

Démonstration. Le terme général du produit est

$$\alpha^i\beta^k x^{g^i+g^k}.$$

Soit d'abord

$$x^{g^i+g^k}=1,$$

il faudra avoir

$$g^i+g^k\equiv 0\ (\text{mod } p)\quad\text{ou}\quad 1+g^{i-k}\equiv 0:$$

mais

$$1+g^{\frac{p-1}{2}}\equiv 0,\qquad\text{ainsi}\qquad k=i\pm\frac{p-1}{2}:$$

de sorte que

$$\alpha^i\beta^k=(\alpha\beta)^i\alpha^{\pm\frac{p-1}{2}}.$$

D'abord $\alpha^{p-1}=1$ donne

$$\alpha^{\frac{p-1}{2}}=\alpha^{-\frac{p-1}{2}},$$

ainsi l'on a toujours

$$\alpha^i\beta^k = (\alpha\beta)^i \alpha^{\frac{p-1}{2}},$$

et, comme on doit faire

$$i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ p-2,$$

la somme

$$1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \ldots (\alpha\beta)^{p-2} = \frac{(\alpha\beta)^{p-1} - 1}{\alpha\beta - 1}$$

sera nulle.

Soit ensuite

$$g^i + g^k \equiv g^m \quad \text{ou bien} \quad 1 + g^{i-k} \equiv g^{m-k} \pmod{p};$$

en posant

$$g^{i-k} \equiv s, \quad \text{d'où} \quad g^{m-k} \equiv s+1,$$

il viendra

$$i - k \equiv \operatorname{ind} s, \quad m - k \equiv \operatorname{ind}(s+1), \quad (\text{mod. } p-1):$$

de sorte que le coefficient $\alpha^i\beta^k$ devient, à cause de $k \equiv m - \operatorname{ind}(s+1)$, $i \equiv k + \operatorname{ind} s \equiv m + \operatorname{ind} s - \operatorname{ind}(s+1)$,

$$(\alpha\beta)^{m - \operatorname{ind} s - \operatorname{ind}(s+1)} \cdot \alpha^{\operatorname{ind} s},$$

et le terme complet sera

$$(\alpha\beta)^m \cdot \alpha^{g^m} \underset{s=1}{\overset{s=p-2}{\mathrm{S}}} \alpha^{\operatorname{ind} s} \cdot (\alpha\beta)^{-\operatorname{ind} s - \operatorname{ind}(s+1)}.$$

La somme S ne varie pas, quel que soit m; elle doit être prise pour

$$s = 1,\ 2, \ldots,\ p-2;$$

de sorte que l'on a la formule de l'énoncé en donnant à m les valeurs $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ p-2$, et faisant la somme des résultats.

Si l'on avait posé

$$1 + g^{k-t} = g^{m-t},$$

puis

$$g^{k-t} = s' \quad [\text{de là} \quad ss' \equiv 1 \pmod{p}],$$

on aurait trouvé

$$\mathrm{F}(\alpha\beta) \underset{s'=1}{\overset{s'=p-2}{\mathrm{S}}} \beta^{\operatorname{ind} s} \cdot (\alpha\beta)^{-\operatorname{ind}(s+1)}.$$

En effet, comme $ss' \equiv 1$ donne $s(s'+1) \equiv 1+s$, on a à la fois

$$\operatorname{ind} s + \operatorname{ind} s' \equiv 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{ind} s + \operatorname{ind}(s'+1) \equiv \operatorname{ind}(s+1) \pmod{p-1},$$

d'où résulte

$$S\alpha^{\operatorname{ind} s}(\alpha\beta)^{-\operatorname{ind}(s+1)} = S\beta^{\operatorname{ind} s'}.(\alpha\beta)^{-\operatorname{ind}(s'+1)}.$$

Corollaire. Si l'on fait

$$\alpha = \gamma^m, \qquad \beta = \gamma^n,$$

on aura

$$\psi(\gamma) = S.\gamma^{m \operatorname{ind} s - (m+n) \operatorname{ind}(s+1)},$$

et l'équation

$$F(\gamma^m).F(\gamma^n) = \psi(\gamma).F(\gamma^{m+n}),$$

qui est celle de Jacobi.

Cette démonstration est prise en partie à M. Cauchy. La notation se rapproche de celle d'Eisenstein. M. Kummer a donné encore d'autres formes au nombre complexe $\psi(\gamma)$.

La proposition II suppose donc qu'on n'a pas

$$\gamma^m = 1, \ \gamma^n = 1, \ \gamma^{m+n} = 1 \qquad (\alpha = 1, \ \beta = 1, \ \alpha\beta = 1).$$

Proposition III. *On a toujours l'équation*

$$p = S\alpha^{\operatorname{ind} s}(\alpha\beta)^{-\operatorname{ind}(s+1)}.S\alpha^{-\operatorname{ind} s}(\alpha\beta)^{\operatorname{ind}(s+1)},$$

les sommes étant prises pour $s = 1, 2, \ldots, p-2$.

Démonstration. Changez, dans la proposition II, α, β en α^{-1}, β^{-1}; multipliez membre à membre les équations ainsi obtenues, et simplifiez, par le moyen de la proposition I, et vous aurez l'équation de la proposition III.

Corollaire I. Si les racines α, β étaient changées en α^m, α^n, on aurait

$$p = S\alpha^{m \operatorname{ind} s - (m+n) \operatorname{ind}(s+1)}.S\alpha^{-m \operatorname{ind} s + (m+n) \operatorname{ind}(s+1)}.$$

Corollaire II. Soit

$$p = \mu\varpi + 1, \qquad \alpha^{\mu} = 1,$$

et. de plus,

$$m = 1, \quad m + n = \mu - 1, \quad \text{ou} \quad n = \mu - 2,$$

on trouvera

$$p = S\alpha^{\text{ind}\, s\,(s+1)} . S\alpha^{-\text{ind}\, s\,(s+1)} = p_1 p_2;$$

on a donc

$$p_1 = S\alpha^{\text{ind}\, s\,(s+1)} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots a_{\mu-1}\alpha^{\mu-1}.$$

D'où cette règle : Prenez, dans le *Canon arithmeticus* de Jacobi, les indices des nombres 2, 6, 12,..., $(p-2)$, $(p-1)$ (doubles des nombres triangulaires), le coefficient a_i représentera le nombre des indices de forme $k\mu + i$. Cette règle est d'Eisenstein.

Proposition IV. *Si dans*

$$\frac{F(r^{-m}).F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})} = \psi(r)$$

le nombre r racine primitive de $r^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ est remplacé par le nombre g, on aura, m et n étant positifs inférieurs à $p-1$ et $m+n$ non divisible par $p-1$,

$$\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi m . \Pi n} \pmod p.$$

Démonstration. Si dans les propositions I et II on remplace α, β par les entiers g^{-m}, g^{-n}, les démonstrations subsistent, seulement les équations se changent en congruences pour le module p.

Le nombre qui multiplie $F(g^{-m-n})$ n'est autre que le coefficient de x^t, c'est-à-dire $Sg^{-mt}.g^{-nk}$ sous l'hypothese $g^t + g^k \equiv 1$, ou encore $S.g^{-mt}(1-g^t)^{-n}$ qui revient à

$$Sg^{(p-1-m)t}(1-g^t)^{p-1-n}.$$

Posons

$$p - 1 - m = m_1, \quad p - 1 - n = n_1;$$

comme le terme général de S est

$$(-1)^h \frac{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-h+1)}{1.2\ldots h} g^{t(m_1+h)},$$

et que, pour avoir le reste de S divisé par p, on doit remplacer

$1 + g^k + g^{2k} + \ldots + g^{(p-2)k} = \frac{g^{(p-1)k} - 1}{g^k - 1}$ par 0 ou $p - 1$, selon que k est ou non multiple de $p - 1$, il faudra poser

$$m_1 + h = p - 1 \quad \text{ou bien} \quad h = p - 1 - m_1 = m :$$

on aura ainsi

$$(-1)^m (p-1) \frac{[p-(n+1)].[p-(n+2)]\ldots[p-(n+m)]}{1.2\ldots m}$$

$$\equiv -(-1)^m \frac{pQ + (-1)^m (n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1.2\ldots m}$$

$$\equiv -\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1.2\ldots m} \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi m.\Pi n} \pmod{p}.$$

N. B. Q est un entier que l'on peut négliger, parce que $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1.2\ldots m}$ est entier. Comme $i = 0$ donne $1 - g^i = 0$, il a été permis de faire $i = 0$. Sans cela, la chose n'aurait pas été permise.

On pourrait tirer de là les formules de M. Cauchy pour les coefficients du nombre $\psi(\alpha)$ qui sont précisément les mêmes que ceux de $\psi(g)$.

Dans le nombre

$$a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \ldots a_{\mu-1} \alpha^{\mu-1} \quad \text{où} \quad \mu = \frac{p-1}{\varpi}.$$

si nous faisons $\alpha = \rho^{\varpi}$, ρ étant une racine primitive, nous aurons, par le théorème précédent, la valeur de

$$a_0 + a_1 g^{\varpi} + a_2 g^{2\varpi} + \ldots a_{\mu-1} g^{(\mu-1)\varpi};$$

mais le changement de α, β en g^{-m}, g^{-n} pouvant être remplacé par celui de α, β en g^{-mi}, g^{-ni}, on obtiendrait assez de congruences pour déterminer $a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-1}$. Il serait inutile de les mettre ici et de faire quelques remarques relatives aux cas pour lesquels la proposition II est en défaut. Tout ce qu'il importe de remarquer, c'est que a_0, a_1, etc., dépendent de congruences du premier degré, renfermant des coefficients binomiaux. De là résulte ce beau théorème :

Toutes les équations indéterminées auxquelles on est conduit par

la formule

$$p = \psi(\alpha).\psi(\alpha^{-1})$$

sont résolubles algébriquement au moyen des restes de certains coefficients binomiaux.

Le premier exemple est dû à M. Gauss, qui a montré que l'équation

$$x^2 + y^2 = p = 4\varpi + 1$$

est résolue en prenant

$$x \equiv \frac{1}{2}\frac{\Pi\, 2\varpi}{\Pi\, \varpi . \Pi\, \varpi} \pmod{p}.$$

M. Jacobi et surtout M. Cauchy en ont donné d'autres.

On voit en quoi consiste l'importance que M. Jacobi donne à la proposition IV.

Application de la proposition III, objet principal de cette Note.

On a

$$p = S\alpha^{m \operatorname{ind} s - (m+n) \operatorname{ind}(s+1)} . S\alpha^{-m \operatorname{ind} s + (m+n) \operatorname{ind}(s+1)}.$$

Si l'on suppose

$$p = \mu\varpi + 1 \quad \text{et} \quad \alpha^{\mu} = 1,$$

au moyen du *Canon arithmeticus*, on formera facilement l'équation

$$p = f(\alpha).f(\alpha^{-1})$$
$$= (a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{\mu-1}\alpha^{\mu-1})(a_0 + a_1\alpha^{-1} + a_2\alpha^{-2} \ldots + \alpha_{\mu-1}\alpha^{-(\mu-1)}),$$

ou bien encore

$$p = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 \ldots + A_{\mu-1}\alpha^{(\mu-1)},$$

en posant

$$A_0 = \Sigma a_i^2, \quad A_1 = \Sigma a_i a_{i+1}, \ldots, \quad A_k = \Sigma a_i\, a_{i+k}, \ldots,$$

les sommes étant prises en faisant $i = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1$ et diminuant, quand cela est possible, les indices de μ.

Ainsi l'on a l'équation

$$P = A_0 - p + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + \ldots + A_{\mu-1} \alpha^{(\mu-1)} = 0.$$

Remarque. En partant de l'équation

$$p = S\alpha^{\text{ind } s(s+1)} . S\alpha^{-\text{ind } s(s+1)},$$

le calcul des a_0, a_1, etc., et, par suite, des A_0, A_1, etc., devient très-facile au moyen de la règle de M. Eisenstein, donnée plus haut.

Ceci posé, comme l'équation $P = 0$ est satisfaite par toutes les valeurs de α autres que celles qui satisfont à

$$\alpha^m = 1, \quad \alpha^n = 1, \quad \alpha^{m+n} = 1,$$

on saura trouver une fonction entière de α, savoir

$$Q = B_0 + B_1 \alpha + B_2 \alpha_2 + \ldots + B_\nu \alpha^\nu,$$

qui divisera P; de là des équations de condition entre les coefficients de l'équation $P = 0$. Comme $Q = 0$ n'a pas de racines égales, si le reste de la division de P par Q est

$$C_0 + C_1 \alpha + \ldots + C_{\nu-1} \alpha^{\nu-1},$$

il faudra poser

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0, \ldots, \quad C_{\nu-1} = 0.$$

On peut évidemment, pour simplifier, remplacer Q par un de ses diviseurs, on obtient ainsi des équations de condition plus simples et qui résultent des conditions générales.

Dans le cas présent, si ω_1, ω_2, ω_3 sont les plus grands communs diviseurs de μ et m, μ et n, μ et $m + n$, et que ω soit le plus petit multiple de ω_1, ω_2, ω_3 (supposé autre que μ), on pourra prendre pour Q le quotient

$$\frac{\alpha^\mu - 1}{\alpha^\omega - 1} \quad \text{ou} \quad \alpha^{\mu-\omega} + \alpha^{\mu-2\omega} + \ldots + \alpha^\omega + 1 = 0.$$

Les équations de condition deviennent

$$\begin{aligned} A_0 - p &= A_\omega = A_{2\omega} \ldots = A_{\mu-\omega}, \\ A_1 &= A_{\omega+1} = A_{2\omega+1} \ldots = A_{\mu-\omega+1}, \\ A_2 &= A_{\omega+2} = A_{2\omega+2} \ldots = A_{\mu-\omega+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En doublant les équations de la première ligne, il vient

$$2p = 2A_0 - 2A_{f\omega},$$

où f peut être $1, 2, 3, \ldots, \mu - 1$.

L'équation précédente revient à

$$2p = 2\Sigma a_i^2 - 2\Sigma a_i a_{i+f\omega} = \Sigma(a_i - a_{i+f\omega})^2.$$

Le second membre étant une somme de μ carrés qui s'obtiennent en posant $i = 0, 1, \ldots, \mu - 1$. En donnant à f différentes valeurs, on aura des décompositions généralement égales deux à deux.

Pour le cas de μ pair dans une décomposition, les carrés peuvent devenir égaux 2 à 2; alors on a la décomposition de p en $\frac{\mu}{2}$ carrés: cela arrive pour μ divisible par 4.

Quand on partira de l'équation

$$p = S\alpha^{\text{ind } s.s+1} . S\alpha^{-\text{ind } s.s+1},$$

qui suppose $m = 1$, $n = -2$. Si μ est impair, on aura $\omega = 1$; si μ est pair, $\omega = 2$. De là les formules :

$$2p = \Sigma(a_i - a_{i+f})^2, \quad 2p = \Sigma(a_i - a_{i+2f})^2.$$

Ainsi pour μ impair et $f = 1$, on a

$$2p = (a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + \ldots + (a_{\mu-1} - a_0)^2;$$

pour $\mu = 3$, en doublant, on aurait

$$4p = (a_1 - 2a_2 + a_0)^2 + 3(a_0 - a_1)^2.$$

Comme

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_0) = 0,$$

l'une des trois différences est divisible par 3. Soit $a_0 - a_1$, on aura

$$4p = (a_1 - 2a_2 + a_0)^2 + 27\left(\frac{a_0 - a_1}{3}\right)^2,$$

formule de Jacobi.

Pour $\mu = 4\mu_1$, $f = 2\mu_1$, on trouverait, les carrés étant égaux, 2 à 2,

$$p = (a_0 - a_{2\mu_1})^2 + (a_1 - a_{2\mu_1+1})^2 \ldots + (a_{2\mu_1-1} - a_{4\mu_1-1})^2.$$

Pour $\mu_1 = 1$, on a l'équation de M. Eisenstein,

$$p = (a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2,$$

qui l'a proposée à démontrer dans le tome XXVIII du *Journal* de M. Crelle. La démonstration qui précède est une conséquence des formules établies par M. Eisenstein dans son Mémoire sur la division du cercle. (*Journal* de M. Crelle, tome XXVII.)

Les formules données plus haut conduisent facilement aux équations (33), (35), (36), (37), (38) d'un Mémoire de M. Cauchy sur la théorie des nombres. (*Bulletin* de Férussac, 1829.)

Si l'on voulait des applications numériques, par exemple, pour

$$p = 61 = \mu\varpi + 1,$$

on pourrait prendre pour μ les valeurs 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Ainsi l'on aurait

$$p = 61,$$

μ,	a_0,	a_1,	a_2,...,									
3,	20,	24,	15,..,									
4,	17,	18,	12,	12,								
5,	12,	15,	12,	14,	6,							
6,	12,	12,	5,	8,	12,	10,						
10,	6,	6,	6,	10,	4,	6,	9,	6,	4,	2,		
12,	6,	8,	0,	2,	6,	4,	6,	4,	5,	6,	6,	6,

. . . . . .

De là les décompositions :

$\mu=3$, $2p = 122 = (20-24)^2 + (24-15)^2 + (15-20)^2 = 16 + 81 + 25$,

$\mu=4$, $p = 61 = (17-12)^2 + (18-12)^2 = 25 + 36$,

$\mu=5$, $2p = (12-15)^2 + (15-12)^2 + (12-14)^2 + (14-6)^2 + (6-12)^2$
$= 9 + 9 + 4 + 64 + 36$,

$2p = (12-12)^2 + (15-14)^2 + (12-6)^2 + (14-12)^2 + (6-15)^2$
$= 0 + 1 + 36 + 4 + 81$,

. . . . . .

Il serait superflu de multiplier les exemples.

Comme les nombres a_0, a_1, etc., trouvés par la règle d'Eisenstein, sont tous pairs sauf un, et que la demi-somme de deux carrés pairs, aussi bien que celle de deux carrés impairs, est une somme de deux carrés, il suit de ce qui précède que l'on a ces *théorèmes :*

1°. *Soit p un nombre premier, μ un diviseur quelconque de $p-1$, mais plus grand que 2, $2p$ sera toujours la somme de μ carrés.*

2°. *Pour μ impair, p sera la somme de $\mu+1$ carrés dont deux seront égaux.*

3°. *Pour μ pair, p sera la somme de μ carrés.*

4°. *Pour μ divisible par 4, p sera la somme de $\frac{\mu}{2}$ carrés.*

Il faut bien remarquer que zéro est mis au nombre des carrés pairs.

ADDITION

A LA

DISCUSSION DE DEUX MÉTHODES ARABES

POUR DÉTERMINER UNE VALEUR APPROCHÉE DE sin 1° [*];

PAR M. WOEPCKE.

En exposant le procédé employé par Oloug-Beg, pour former les coefficients de sa série (page 172), j'aurais dû peut-être indiquer aussi de quelle manière Oloug-Beg a pu être conduit à cette méthode. Je m'empresse de suppléer à cette omission, en tâchant de résoudre la question par une conjecture qui, je crois, peut en offrir une explication satisfaisante.

L'équation qu'il s'agit de résoudre est

$$X = \frac{A + X^2}{B},$$

où

$$A = am + a_0 + a_1 \frac{1}{m} + a_2 \frac{1}{m^2} + \ldots,$$

$$B = bm;$$

donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} X = \frac{a}{b} + \frac{a_0}{b}\frac{1}{m} + \frac{a_1}{b}\frac{1}{m^2} + \frac{a_2}{b}\frac{1}{m^3} + \ldots \\ + \frac{X^2}{b}\frac{1}{m}. \end{aligned} \right.$$

On aura, comme une première approximation, en prenant seule-

[*] *Voir* le tome XIX de ce Journal, pages 153 et suivantes.

ment le premier terme de la série (I),

$$X_1 = \frac{a}{b} = a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}.$$

Seconde approximation, allant jusqu'au deuxième terme de la série (I),

$$X_2 = X_1 + \left(\frac{a_0}{b} + \frac{X_1^3}{b}\right)\frac{1}{m},$$

et, en négligeant $\frac{\alpha_0}{b}$ dans X_1^3,

$$= X_1 + \frac{a_0 + (a'_0)^3}{b}\frac{1}{m} = a'_0 + \frac{m\alpha_0 + (a'_0)^3 + a_0}{b}\frac{1}{m}$$

$$= a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + \left(\frac{\alpha_1}{b}\right)\frac{1}{m}.$$

Troisième approximation, allant jusqu'au troisième terme de la série (I),

$$X_3 = X_2 + \frac{a_1}{b}\frac{1}{m^2} + \frac{X_2^3 - X_1^3}{b}\cdot\frac{1}{m},$$

et, en négligeant $\left(\frac{\alpha_1}{b}\right)\frac{1}{m}$ dans X_2^3 et $\frac{\alpha_0}{b}$ dans X_1^3,

$$= X_2 + \left\{\frac{a_1}{b} + \frac{m\left[\left(a'_0 + a'_1\frac{1}{m}\right)^3 - (a'_0)^3\right]}{b}\right\}\frac{1}{m^2}$$

$$= a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + \frac{m\alpha_1 + m\left[\left(a'_0 + a'_1\frac{1}{m}\right)^3 - (a'_0)^3\right] + a_1}{b}\frac{1}{m^2}$$

$$= a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + a'_2\frac{1}{m^2} + \left(\frac{\alpha_2}{b}\right)\frac{1}{m^2}.$$

Quatrième approximation, allant jusqu'au quatrième terme de la série (I),

$$X_4 = X_3 + \frac{a_2}{b}\frac{1}{m^3} + \frac{X_3^3 - X_2^3}{b}\frac{1}{m},$$

et, en négligeant $\left(\frac{\alpha_2}{b}\right)\frac{1}{m^2}$ dans X_3^3 et $\left(\frac{\alpha_1}{b}\right)\frac{1}{m}$ dans X_2^3,

$$= X_3 + \left\{ \frac{a_2}{b} + \frac{m^2\left[\left(a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + a'_2\frac{1}{m^2}\right)^3 - \left(a'_0 + a'_1\frac{1}{m}\right)^3\right]}{b} \right\}\frac{1}{m}$$

$$= a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + a'_2\frac{1}{m^2}$$

$$+ \frac{m\alpha_2 + m^2\left[\left(a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + a'_2\frac{1}{m^2}\right)^3 - \left(a'_0 + a'_1\frac{1}{m}\right)^3\right] + a_2}{b}\frac{1}{m^3}$$

$$= a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + a'_2\frac{1}{m^2} + a'_3\frac{1}{m^3} + \left(\frac{\alpha_3}{b}\right)\frac{1}{m^3}.$$

On obtient ainsi, comme on voit, la série d'Oloug-Beg. Le point essentiel consiste à remarquer que l'on reprend, dans chaque approximation, le terme $\frac{X^3}{b}\frac{1}{m}$ de la série (I), en en retranchant ce que donnait déjà l'approximation précédente, pour éviter le double emploi.

NOTE

SUR

UN THÉORÈME DE M. BRIOSCHI;

PAR M. FAÀ DE BRUNO.

La réciprocité des racines de l'équation

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} c_{1,1}-\lambda, & c_{1,2}, \ldots, & c_{1,n} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}-\lambda, \ldots, & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, \ldots, & c_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

démontrée dernièrement par M. Brioschi dans ce Journal, page 253, peut s'établir très-simplement ainsi qu'il suit.

Multiplions le déterminant (1) par le même déterminant, où l'on supposerait $\lambda = 0$. Par suite des conditions auxquelles sont assujetties les quantités c, le produit sera

$$\begin{vmatrix} 1-c_{1,1}\lambda, & -c_{1,2}\lambda, \ldots, & -c_{1,n}\lambda \\ -c_{2,1}\lambda, & 1-c_{2,2}\lambda, \ldots, & c_{2,n}\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -c_{n,1}\lambda, & c_{n,2}\lambda, \ldots, & 1-c_{n,n}\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

lequel, en posant

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda},$$

et changeant de signe, se transformera dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}-\lambda', & c_{1,2}, \ldots, & c_{1,n} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}-\lambda', \ldots, & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, \ldots, & c_{n,n}-\lambda' \end{vmatrix} = 0,$$

semblable au premier, ce qui prouve bien que l'équation (1) est satisfaite soit par λ, soit par $\frac{1}{\lambda}$.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR

LES NOMBRES PREMIERS,

PAR M. A. DE POLIGNAC.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I.

DÉFINITION DES SUITES DIATOMIQUES.

Considérons la suite naturelle des nombres

$$(a)\qquad \begin{cases} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10, \\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ldots. \end{cases}$$

Si nous rayons tous les nombres de deux en deux à partir de zéro, nous obtiendrons ainsi le tableau (a_1),

$$(a_1)\qquad \begin{cases} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12, \\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ldots. \end{cases}$$

Nous aurons toujours un nombre rayé compris entre deux nombres conservés; donc, après cette première opération, les séquences des termes rayés se succéderont comme les termes de la suite

$$(1)\qquad 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ldots,$$

que nous appellerons *suite diatomique de* 2, ou *première suite diatomique.*

Dans le tableau (a_1), rayons encore les nombres de trois en trois à

partir de zéro, et nous aurons le nouveau tableau

$$(a_2)\qquad \begin{cases} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11, \\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ldots, \end{cases}$$

dans lequel les séquences de termes rayés se succèdent comme les termes de la suite périodique

$$(2)\qquad 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ldots.$$

que nous nommerons *suite diatomique de* 3, ou *deuxième suite diatomique*.

Après l'unité, le premier nombre non rayé dans le tableau (a_2) est le nombre 5; rayons les nombres de ce tableau de cinq en cinq à partir de zéro, nous obtiendrons le tableau (a_3) :

$$(a_3)\qquad \begin{cases} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13, \\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27, \\ 28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36,\ 37,\ldots, \end{cases}$$

et les séquences de termes rayés se suivront comme les termes de la suite périodique

$$(3)\qquad 1,\ 5,\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 5,\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ldots,$$

qui sera la suite diatomique de 5 ou la troisième suite diatomique.

La suite diatomique de 7, ou la quatrième suite diatomique, serait

$$(4)\qquad \begin{cases} 1,\ 9,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 5,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 5,\ 1,\ 5,\ 3,\ 1,\ 5,\ 3,\ 5,\ 7, \\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 7,\ 5,\ 3,\ 5,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 5,\ 5,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 5,\ 3, \\ 1,\ 3,\ 1;\quad 1,\ 9,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 5,\ 3,\ldots. \end{cases}$$

Pour généraliser ce qui précède, remarquons d'abord que les seconds nombres non rayés dans les tableaux successifs (a), (a_1), (a_2), (a_3), etc., sont précisément les nombres premiers rangés dans leur ordre naturel, et désignons par P_n le $n^{ième}$ nombre premier; alors, en rayant les nombres du tableau (a) de deux en deux, puis de trois en trois, de cinq en cinq, et, enfin, de P_n en P_n, nous formerons un tableau (a_n) dans lequel les séquences de termes rayés auront respectivement pour valeurs les termes d'une certaine suite que nous appellerons *suite diatomique de* P_n, ou $n^{ième}$ *suite diatomique*.

§ II.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES SUITES DIATOMIQUES.

THÉORÈME I. — *Toute suite diatomique est périodique, et la période commence avec la suite.*

Admettons que le théorème soit vrai pour la $(n-1)^{\text{ième}}$ suite; si celle-ci est périodique, en effaçant dans le tableau (a_{n-1}) les nombres de P_n en P_n pour former le tableau (a_n), on finira nécessairement par trouver deux multiples de P_n déjà effacés et occupant la même place dans le tableau (a_{n-1}).

Nous appelons *place* d'un nombre dans le tableau (a_{n-1}) sa distance au nombre qui commence la période dans laquelle se trouve le nombre considéré; ainsi, par exemple, 5, 11, 17,..., $5+6n$ occupent la sixième place par rapport au tableau (a_2).

Soient kP_n et $k'P_n$ les nombres trouvés qui occupent la même place dans le tableau (a_{n-1}); alors les séquences ou termes du tableau (a_n), trouvés en allant de kP_n vers $k'P_n$, se répéteront après $k'P_n$ indéfiniment et dans le même ordre par raison de symétrie, et, réciproquement, on trouvera ces mêmes termes dans le même ordre en allant de $k'P_n$ vers kP_n, ou de kP_n vers zéro.

Maintenant, on peut supposer que la distance entre $k'P_n$ et kP_n est plus grande qu'entre kP_n et zéro; donc, puisque tous les termes, en allant de kP_n vers zéro, se suivent dans le même ordre qu'en allant de $k'P_n$ vers kP_n, on trouvera entre kP_n et $k'P_n$ un certain multiple de P_n, μP_n, qui occupera, par rapport à la période du tableau (a_{n-1}), la même place que zéro. Donc les termes trouvés en allant de zéro vers μP_n se répéteront indéfiniment et dans le même ordre après μP_n; or la succession de ces termes forme ce que nous appelons la $n^{\text{ième}}$ *suite diatomique;* si donc le théorème existe pour la suite $(n-1)$, il existe aussi pour la suite (n). Or le théorème est vrai pour la suite (1); il est donc général.

THÉORÈME II. — *Le premier nombre du tableau (a_n), après lequel les séquences de termes rayés se reproduisent périodiquement, nombre*

que nous désignons par (μP_n), *est le produit de tous les nombres premiers jusqu'à* P_n *inclusivement.*

En partant du nombre (μP_n) et effaçant les nombres de deux en deux, puis de trois en trois, de cinq en cinq, ..., et enfin de P_n en P_n, on effacerait juste les mêmes nombres qu'en partant de zéro, et en faisant les mêmes opérations.

Donc (μP_n) est égal à $2.3.5... P_n$ ou à un sous-multiple de ce produit; or, ce sous-multiple contenant au moins un nombre premier de moins, on ne serait pas dans les mêmes conditions que si l'on partait de zéro; donc

$$(\mu P_n) = 2.3.5... P_n.$$

Théorème III. — *Dans toute suite diatomique la période a pour premier terme l'unité; et, dans la série de tous les autres, les termes également distants des extrêmes sont égaux.*

D'abord le premier terme sera l'unité; car $(\mu P_n) - 1$ et $(\mu P_n) + 1$ ne sont divisibles par aucun des nombres premiers non supérieurs à P_n : donc, après la $n^{ième}$ opération, $(\mu P_n) - 1$ et $(\mu P_n) + 1$ ne seront rayés ni l'un ni l'autre, et (μP_n) sera seul rayé entre eux.

Considérons maintenant, dans le tableau (a_n), deux multiples consécutifs de (μP_n), par exemple μP_n et $2\mu P_n$; il est évident que les termes de la période de la suite (n), qui seront à égale distance de μP_n et de $2\mu P_n$, seront égaux.

Le nombre des termes étant impair, il y a toujours un terme milieu.

Théorème IV. — *Les multiples de* P_n *occupent toutes les places par rapport à la période du tableau* (a_{n-1}) *et ne les occupent qu'une seule fois dans chaque période du tableau* (a_n).

Le nombre de places dans la période de la $(n-1)^{ième}$ suite est $\frac{(\mu P_n)}{P_n}$, il faut prouver que les μ places occupées par les multiples de P_n, depuis P_n jusqu'à (μP_n), sont toutes différentes par rapport à la période du tableau (a_{n-1}).

Or cela a lieu, sans quoi (μP_n) ne serait pas le premier à partir duquel la période de la $n^{ième}$ suite recommencerait comme à partir de zéro.

THÉORÈME V. — *Si nous désignons par* $\Phi(\mu P_n)$ *le nombre des termes de la période de la* $n^{ième}$ *suite diatomique, nous aurons*

$$\Phi(\mu P_n) = (2-1)(3-1)(5-1)\ldots(P_{n-1}-1)(P_n-1).$$

Désignons par k le nombre des termes de la $(n-1)^{ième}$ suite, et supposant que le théorème soit vrai pour cette suite, il sera vrai pour la $n^{ième}$; en effet, le tableau (a_n) contient (P_n) fois le tableau (a_{n-1}), en sorte que, si aucune séquence n'avait été réunie à la précédente en rayant le terme qui les sépare, le nombre des termes du tableau (a_n) serait $k.P_n$; mais, d'après le théorème précédent, les multiples de P_n occupent et n'occupent qu'une seule fois toutes les places de la période (a_{n-1}) dans la première période de (a_n); donc, entre autres, les places non rayées seront occupées. Or ces places sont au nombre de k; donc il faudra, pour avoir le nombre des termes de (a_n), retrancher k de kP_n; on arrive ainsi à $k(P_n-1)$.

On vérifie le théorème pour $n=1$; il est général.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème très-connu; en effet, $\Phi(\mu P_n)$ est le nombre des nombres premiers et inférieurs à (μP_n).

On voit que le nombre des termes augmente très-rapidement:

Pour $n=1$, $\Phi(\mu P_n)$ devient 1,

Pour $n=2$, $\Phi(\mu P_n)$ devient 2,

Pour $n=3$, $\Phi(\mu P_n)$ devient 8,

Pour $n=4$, $\Phi(\mu P_n)$ devient 48,

Pour $n=5$, $\Phi(\mu P_n)$ devient 480.

THÉORÈME VI. — *Si l'on désigne par* S_n *la somme des termes de la période de la* $n^{ième}$ *suite, ou, ce qui revient au même, le nombre des entiers inférieurs à* μP_n *et divisibles par un ou plusieurs facteurs non supérieurs à* P_n, *on aura évidemment, d'après les théorèmes précédents,*

$$S_n(\mu P_n) - \Phi(\mu P_n) = (\mu P_n) - (2-1)(3-1)\ldots(P_n-1).$$

§ III.

DE LA SUITE MÉDIANE ET DES SUITES CONSTANTES QUI TENDENT A SE FORMER DANS LES SUITES DIATOMIQUES.

A cause de la symétrie des suites diatomiques, si, au lieu de partir de zéro pour former une période d'une suite diatomique, on part de $\frac{\mu P_n}{2}$, on formera la moitié d'une période en allant jusqu'à μP_n. Désignons par a le nombre $\frac{\mu P_n}{2}$, et considérons la suite des nombres naturels,

$$\ldots,\quad a-6,\quad a-5,\quad a-4,\quad a-3,\quad a-2,\quad a-1,$$
$$a,\quad a+1,\quad a+2,\quad a+3,\quad a+4,\quad a+5,\quad a+6,\ldots,$$

il est clair d'abord que tous les termes de la forme

$$a \pm 2m + 1$$

seront effacés comme nombres pairs, puisque a est impair; maintenant, si l'on efface (en partant de a) de trois en trois, de cinq en cinq, de sept en sept,..., de P_n en P_n, il est clair qu'en prenant n assez grand, on effacera tous les termes de la suite précédente (jusqu'à un terme choisi arbitrairement), excepté les termes de la forme

$$a \pm 2^m.$$

On voit donc qu'il tend à se former, au milieu des suites diatomiques, une suite constante que nous appellerons *suite médiane*, et qui n'est autre que la succession des puissances de 2 diminuées d'une unité. On voit, de plus, que la suite médiane s'étend au delà de toute limite. Les termes milieux des suites diatomiques tendent donc vers un état définitif, les puissances de 2 diminuées d'une unité. Ils présentent le tableau suivant :

$$\ldots, 255, 127, 63, 31, 15, 7, 3, 1, \underline{\bar{3}}, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, \ldots.$$

En particulier, on remarquera que le terme milieu est toujours 3.

On peut se proposer, étant donnée une suite diatomique, de déter-

miner le nombre des termes de la suite médiane qui appartiennent à cette suite diatomique. Cette question paraît très-difficile; toutefois on peut aisément avoir une limite inférieure du nombre cherché. En effet, ce nombre sera au moins égal à deux fois le nombre des puissances de 2 inférieures à P_n augmenté d'une unité.

Prenons maintenant $\frac{\mu P_n}{3}$, $\frac{\mu P_n}{5}$, ou, en général, $\frac{\mu P_n}{P_k}$, P_k étant au plus égal à P_n, et voyons quels seront les termes des suites diatomiques correspondants aux nombres situés autour de $\frac{\mu P_n}{3}$, $\frac{\mu P_n}{5}$,..., $\frac{\mu P_n}{P_k}$. Désignons $\frac{\mu P_n}{P_k}$ par a; il y a deux cas particuliers à distinguer :

1°. $$a \pm 1 \equiv 0 \pmod{P_k};$$

alors les termes diatomiques situés autour de a présentent les tableaux suivants (pourvu qu'on prenne P_n assez grand) :

$$\ldots,\quad P_k^3 - P_k^2 - 1,\quad P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k,\quad P_k - 2,$$

$$P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k^3 - P_k^2 - 1,\ldots,$$

pour

$$a - 1 \equiv 0,$$

et

$$\ldots,\quad P_k^3 - P_k^2 - 1,\quad P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k - 2,\quad P_k,$$

$$P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k^3 - P_k^2 - 1,\ldots$$

pour

$$a + 1 \equiv 0.$$

2°. a n'est congru ni avec $+1$, ni avec -1; alors on a le tableau suivant, qui ne diffère des précédents que par les termes du milieu,

$$\ldots,\quad P_k^3 - P_k^2 - 1,\quad P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k - 2,\quad 1,\quad P_k - 2,$$

$$P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k^3 - P_k^2 - 1.$$

Dans le cas de

$$\frac{\mu P_n}{3} = a,$$

comme $a-1$ ou $a+1$ est l'un ou l'autre congru avec 3, les deux premières valeurs des suites constantes se présenteront seules; pour $\frac{\mu P_n}{P_k}$, P_k étant supérieur à 3, il pourra se présenter les deux cas signalés plus haut.

Considérons maintenant le nombre $\frac{\mu P_n}{2.3}$: nous trouverons qu'à partir de ce terme, il se forme à droite et à gauche une suite qui n'est pas symétrique et dont le terme milieu est 5. Désignons $\frac{\mu P_n}{2.3}$ par b, et prenons la suite des nombres naturels

$$\ldots,\ b-3,\ b-2,\ b-1,\ b,\ b+1,\ b+2,\ b+3,\ldots;$$

tous les nombres de la forme

$$b \pm 2m+1$$

seront effacés comme nombres pairs. Maintenant il y a deux hypothèses à faire :

1°. $$b-1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Dans ce cas, en effaçant de trois en trois à partir de $b-1$, puis de cinq en cinq, de sept en sept,..., de P_n en P_n à partir de b, on voit que, dans la portion de droite, tous les nombres seront effacés, excepté ceux de la forme

$$b+2^{2m},$$

ou de la forme

$$b+2^{\alpha}.3^{\beta},$$

et, dans la portion de gauche, il n'y aura de conservés que les nombres de la forme

$$b-2^{2m+1} \quad \text{ou} \quad b-2^{\alpha}.3^{\beta}.$$

En sorte que les termes de la suite considérée sont, pour la partie droite,

$$2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{\alpha'}.3^{\beta'}-1, \quad \text{ou} \quad 2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{2m}-1, \quad \text{ou} \quad 2^{2m}-2^{\alpha}.3^{\beta}-1,$$

et, pour la partie gauche,

$$2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{\alpha'}.3^{\beta'}-1, \quad \text{ou} \quad 2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{2m+1}-1, \quad \text{ou} \quad 2^{2m+1}-2^{\alpha}.3^{\beta}-1.$$

On peut réunir ces différentes formes dans une seule formule, sauf à la discuter dans les deux cas où l'on prendrait la portion de droite ou la portion de gauche de la série; cette formule est

$$2^{\alpha}.3^{\beta}(\pm 2^{\alpha'-\alpha}.3^{\beta'-\beta}\pm 1)-1.$$

Si l'on se donne α et β, α' et β' sont déterminés. Supposons d'abord que β ne soit pas nul; alors, si la valeur de β' n'est pas nulle non plus, le terme trouvé pour la portion de droite se trouvera aussi dans la portion de gauche de la série. Admettons encore que $\beta > 0$; alors, si $\beta' = 0$, la formule pour représenter un terme de droite devra être telle que

$$\alpha' = 2k,$$

et, pour un terme de gauche,

$$\alpha' = 2k' + 1.$$

Enfin si $\beta = 0$, on aura, pour un terme de droite,

$$\alpha = 2k,$$

et, pour un terme de gauche,

$$\alpha = 2k + 1.$$

β et β' ne peuvent être nuls à la fois; quant aux exposants α et α', aucun d'eux ne peut être nul.

2°. $$(b+1) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Il est aisé de voir, dans ce cas, que la partie gauche devient la partie droite, et *vice versâ;* c'est là le seul changement qui ait lieu.

La suite qui se forme autour de $\frac{\mu P_n}{2.3}$ ne change pas indéfiniment avec P_n; comme la suite médiane, elle tend vers un état constant, seulement elle peut changer de sens, c'est-à-dire que les termes qui pour une valeur de n se trouvent à gauche de $\frac{\mu P_n}{2.3}$ peuvent pour une autre valeur se trouver à droite, et *vice versâ;* ainsi la suite est

constante par rapport à la valeur des termes, et elle n'admet que deux états en considérant leur disposition. Dans tous les cas, l'inspection seule de la forme de $\frac{\mu P_n}{2.3}$, par rapport à 3, suffira pour marquer si l'on a un de ces états ou l'autre.

Nous nous sommes un peu étendu sur cet exemple pour donner une idée de ces sortes de considérations.

Ce qu'on a dit pour $\frac{\mu P_n}{2.3}$ peut se répéter pour $\frac{\mu P_n}{P_k P_{k'}}$, et l'on arrive à des conclusions que notre cadre ne nous permet pas de développer; nous reviendrons là-dessus une autre fois et nous examinerons plus généralement ce qui se passe autour d'un nombre $\frac{\mu P_n}{P_k P_{k'} P_{k''} \ldots}$, par rapport aux termes diatomiques.

Il nous a suffi d'indiquer l'existence de ces suites constantes qui tendent à se former dans les suites diatomiques et nous permettent de trouver des groupes de termes connus, sans qu'il soit besoin de former les suites diatomiques elles-mêmes.

DEUXIÈME PARTIE.

§ I.

SUR LES FONCTIONS μ.

Les fonctions μ, ou plutôt $\mu(x)$, dont nous voulons ici parler, naissent de la considération du produit $2.3.5\ldots P_{n-1} P_n$ des nombres premiers successifs de 2 à P_n, que nous avons ci-dessus désigné par (μP_n) ou μP_n : leur caractère essentiel est d'avoir ce produit pour valeur quand la variable x (que nous supposons croître d'une maniere continue de 1 à ∞) devient égale à un nombre premier P_n. Quel que soit ce nombre premier, nous voulons qu'on ait

$$\mu(x) = 2.3\ldots P_{n-1} P_n \quad \text{pour} \quad x = P_n.$$

Or il y a evidemment une infinité de fonctions jouissant de la propriété indiquée. Ainsi, par exemple, soit $\varpi(P_\theta)_n$ un produit quelconque

de n nombres premiers, et je dis qu'on pourra prendre

$$(1)\qquad \mu(x) = \frac{\varphi(x)\,\Pi\left\{\Pi\,\varphi\left[x^{\frac{1}{\varpi(P_\theta)_{2n}}}\right]\right\}}{\Pi\left\{\Pi\,\varphi\left[x^{\frac{1}{\varpi(P_\theta)_{2n+1}}}\right]\right\}},$$

$\varphi(x)$ étant une fonction égale à l'unité tant que x est < 2, égale à 2 pour $x = 2$, et en général définie par les trois conditions suivantes :

1°. $\varphi(x) = \varphi(x-1)$, tant que x n'est ni premier, ni puissance d'un nombre premier;

2°. $\varphi(x) = x\varphi(x-1)$, si x est premier;

3°. $\varphi(x) = y\varphi(x-1)$, si x est une puissance quelconque d'un nombre premier y (ces deux dernières conditions n'en font à proprement parler qu'une seule, puisque la deuxième est comprise dans la troisième).

Le signe Π est le signe ordinaire de multiplication. On peut du reste écrire autrement la valeur de $\mu(x)$ pour rendre sa forme plus sensible :

$$\mu(x) = \frac{\varphi(x)\,\Pi\,\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right)\Pi\,\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''} P_{k'''}}}\right)\cdots}{\Pi\,\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k}}\right)\Pi\,\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''}}}\right)\cdots};$$

$\Pi\,\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k}}\right)$ désigne le produit $\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{5}}\right)\ldots$ où les dénominateurs des exposants de x sont les nombres premiers 2, 3, 5..... Dans les autres produits Π les facteurs sont tous de la forme $\varphi\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$, mais le dénominateur m est formé par la multiplication de deux, de trois, de quatre nombres premiers, etc., suivant ce qui est indiqué. Observez que pour $x = 1$ tous les facteurs $\varphi\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$ se réduisent à l'unité; il en est de même pour $x > 1$ tant que x reste < 2; ainsi $\mu(x) = 1$ pour toutes les valeurs de x depuis $x = 1$ jusqu'à x aussi près de 2 qu'on voudra. Mais pour $x = 2$, on a $\varphi(x) = 2$; les autres facteurs $\varphi\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$

sont encore égaux à l'unité : on a donc

$$\mu(2) = 2.$$

En général il n'y a qu'un nombre fini de facteurs φ dont la valeur diffère de 1, car dès que m est assez grand pour que $x^{\frac{1}{m}}$ soit < 2, on a

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = 1.$$

On voit aussi tout d'abord que x croissant, $\mu(x)$ ne peut changer de valeur que quand x atteint un nombre premier ou une puissance d'un tel nombre. En effet, par hypothèse, $\varphi(x)$ ne varie que dans ce cas, et il en est de même des autres facteurs de l'expression de $\mu(x)$, car, x n'étant pas puissance d'un nombre premier, $x^{\frac{1}{P_k}}$, $x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}$, $x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''}}}$, etc., ne pourront être ni premiers, ni puissances d'un nombre premier. Mais il y a plus : $\mu(x)$ ne change que quand x atteint un nombre premier simple.

Examinons, en effet, ce qui arrive quand x devient une puissance d'un nombre premier y, et pour cela comparons $\mu(x)$ à $\mu(x-1)$; il y a deux cas à distinguer suivant que l'indice de la puissance est un nombre quelconque, ou bien le produit de nombres premiers à la première puissance.

Traitons d'abord le deuxième cas.

Soit, pour fixer les idées,

$$x = y^{2.3.5.7};$$

nous allons voir qu'en passant de $\mu(x-1)$ à $\mu(x)$, nous introduisons le facteur y avec un exposant égal au numérateur et au dénominateur, en sorte que la valeur de $\mu(x)$ reste égale à celle de $\mu(x-1)$.

On sait d'abord que

$$\varphi(x) = y\,\varphi(x-1);$$

ainsi le premier facteur du numérateur est multiplié par y dans le passage de $\mu(x-1)$ à $\mu(x)$: les deux facteurs suivants $\Pi\,\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right)$

et $\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''} P_{k'''}}}\right)$ introduisent à leur tour y avec les exposants 6 et 1. On a

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right) = \varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.5}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.7}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3.5}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3.7}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.11}}\right)\ldots,$$

et, puisque $x = y^{2.3.5.7}$, les valeurs de φ qui ont ici changé sont

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.3}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.5}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.5}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{3.5}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{3.5}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{3.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{3.7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{5.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{5.7}}\right].$$

Donc

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right) = y^6\,\Pi\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right].$$

De même, pour $y = x^{2.3.5.7}$, on a

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3.5.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.3.5.7}}\right],$$

conséquemment

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''} P_{k'''}}}\right) = y\,\Pi\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''} P_{k'''}}}\right].$$

Les autres facteurs du numérateur gardent la même valeur pour $\mu(x)$ et $\mu(x-1)$.

Au dénominateur, les deux premiers facteurs Π changent seuls. D'abord

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k}}\right) = \varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{5}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{7}}\right)\ldots:$$

or, pour $x = y^{2.3.5.7}$, on a

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{5}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{3}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\right];$$

il s'ensuit

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k}}\right) = y^3\,\Pi\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{P_k}}\right].$$

Semblablement, comme

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{3.5.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{3.5.7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.5.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.5.7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.3.7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3.5}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.3.5}}\right],$$

on trouve

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''}}}\right) = y^4\,\Pi\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''}}}\right].$$

On voit donc, finalement, que y s'introduit au numérateur avec l'exposant $1+6+1=8$, et au dénominateur avec l'exposant $4+4=8$; donc l'expression ne change pas, et $\mu(x) = \mu(x-1)$.

En général, si x est égal à un nombre premier y élevé à une puissance marquée par le produit de m nombres premiers différents, y s'introduira au numérateur avec l'exposant

$$1 + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} + \ldots,$$

et au dénominateur avec l'exposant

$$m + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} + \ldots;$$

or, ces quantités sont égales.

Si x était une puissance d'un nombre premier dans l'indice de laquelle des nombres premiers figureraient plusieurs fois comme facteurs, on ferait une démonstration tout à fait analogue à celle que nous venons de donner, et l'on trouverait que la fonction ne change pas non plus dans ce cas. Pour abréger, nous omettons cette démonstration; le lecteur y suppléera aisément.

Mais si x est purement un nombre premier, le premier facteur du numérateur est multiplié par x quand on passe de $x-1$ à x; aucun autre terme ne change. On a donc alors

$$\mu(x) = x\mu(x-1).$$

Ainsi, partant de $\mu(1) = 1$, on trouvera successivement

$$\mu(2) = 2, \quad \mu(3) = 2.3,$$

et, en général,

$$\mu(x) = 2.3\ldots P_{n-1} P_n \quad \text{pour} \quad x = P_n,$$

P_n étant un nombre premier quelconque; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Reste à choisir $\varphi(x)$ de manière à remplir les trois conditions prescrites.

Or il suffira pour cela d'écrire

$$(2) \qquad \varphi(x) = \frac{F(x)\Pi\left\{\Pi F\left[\frac{x}{\varpi(P_k)_{2n}}\right]\right\}}{\Pi\left\{\Pi F\left[\frac{x}{\varpi(P_k)_{2n+1}}\right]\right\}},$$

dans laquelle $F(x)$ désigne, en général, le produit de tous les nombres consécutifs depuis 1 jusqu'au plus grand entier x contenu dans x, en supposant toutefois $F(x) = 1$ si $x = 0$: on voit que $F(x) = \Gamma(x+1)$ suivant la notation de Legendre, en sorte que si x est un entier, $F(x) = \Gamma(x+1)$.

Pour démontrer la formule (2) nous développerons le second membre; nous écrirons

$$\varphi(x) = \frac{F(x).\Pi F\left(\frac{x}{P_k P_{k'}}\right).\Pi F\left(\frac{x}{P_k P_{k'} P_{k''} P_{k'''}}\right)\cdots}{\Pi F\left(\frac{x}{P_k}\right).\Pi F\left(\frac{x}{P_k P_{k'} P_{k''}}\right)\cdots}.$$

Le nombre des facteurs F dont la valeur diffère de l'unité est toujours limité quelle que soit la valeur de x : pour $x = 1$ et tant que x est < 2, tous les facteurs sont égaux à 1, et comme alors aussi $\varphi(x) = 1$, notre égalité est vérifiée : pour $x = 2$, elle fournit encore la valeur exacte $\varphi(2) = 2$. Voyons ce qui arrive quand x grandit indéfiniment.

Lorsque x est une puissance d'un nombre premier, alors, en passant de $x - 1$ à x, on multiplie le premier membre par la racine de x.

Il faut démontrer qu'il en sera de même pour le second membre, que je désignerai, pour abréger, par $\psi(x)$; or au numérateur rien ne change, sauf le premier facteur, qui dans $\psi(x-1)$ était $F(x-1)$, et qui dans $\psi(x)$ devient

$$F(x) = xF(x-1).$$

Au dénominateur, le seul terme altéré, c'est $F\left(\frac{x-1}{y}\right)$, en désignant par y le nombre premier racine de x; il vient

$$F\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} F\left(\frac{x-1}{y}\right):$$

par suite,

$$\psi(x) = y.\psi(x-1).$$

Donc, si l'égalité (2) avait lieu pour $x - 1$, elle subsiste pour x.

Le cas de x nombre premier est compris dans le précédent; alors $y = x$, et les deux membres se trouvent à la fois multipliés par x. Mais si x a une autre valeur quelconque, alors on démontre d'une manière tout à fait semblable à ce que nous avons donné à propos de la fonction $\mu(x)$, que le second membre ne change pas quand on passe de $x - 1$ à x; donc le second membre reste encore, dans ce cas, égal au premier s'il l'était d'abord; l'égalité (2) déjà vérifiée de $x = 1$ à $x = 2$ est par suite établie généralement.

Puisque $F(x) = \Gamma(x+1)$, on voit que $\mu(x)$ s'exprime complétement avec des fonctions eulériennes.

Nous pouvons maintenant nous proposer la question inverse : exprimer $F(x)$ avec des fonctions φ, et φ avec des fonctions μ.

Cela est très-facile; en effet, prenons de part et d'autre les logarithmes dans la formule (1), nous aurons

$$\log \mu(x) = \log \varphi(x) - \sum \log \varphi\left(x^{\frac{1}{P_k}}\right) + \sum \log \varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right) + \ldots.$$

De même,

$$\log \mu\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \log \varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \sum \log \varphi\left(x^{\frac{1}{2P_k}}\right) + \sum \log \varphi\left(x^{\frac{1}{2P_k P_{k'}}}\right) - \ldots,$$

$$\log \mu\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \log \varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \sum \log \varphi\left(x^{\frac{1}{3P_k}}\right) + \ldots,$$

$$\log \mu\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ etc.}$$

En ajoutant ces égalités, nous aurons

$$\sum \log \mu\left(x^{\frac{1}{g}}\right) = \log \varphi(x),$$

où g reçoit toutes les valeurs 1, 2, 3, etc., jusqu'à une certaine limite, car les logarithmes deviennent nuls quand la valeur de la fonction μ se réduit à l'unité; de là on tire

$$(3) \qquad \Pi \mu\left(x^{\frac{1}{g}}\right) = \varphi(x).$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de faire voir qu'un terme quelconque $\log \varphi\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$, autre que le premier $\log \varphi(x)$, entre, dans les seconds membres des égalités qu'on ajoute, autant de fois avec le signe $+$ qu'avec le signe $-$; et, en effet, il est aisé de s'assurer que le coefficient de ce terme autre que $\log \varphi(x)$ sera, au signe près, de la forme

$$1 - n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} - \ldots = (1-1)^n = 0.$$

On opérerait d'une manière tout à fait analogue pour trouver F en fonction de φ, et l'on obtiendrait

$$(4) \qquad F(x) = \Pi \varphi\left(\frac{x}{\gamma}\right),$$

ou, en développant,

$$F(x) = \varphi(x)\,\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\cdots\varphi\left(\frac{x}{\gamma}\right)\cdots;$$

γ reçoit toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'au nombre qui rend $\frac{x}{\gamma} < 2$, car à partir de là tous les facteurs $\varphi\left(\frac{x}{\gamma}\right)$ sont égaux à l'unité.

Au reste, dans toutes les formules que nous avons données, il suffit de prendre la partie entière de l'indice; car, par exemple,

$$\varphi\left(\frac{x}{\gamma}\right) = \varphi(a)$$

si nous appelons a l'entier contenu dans $\frac{x}{\gamma}$: et

$$\mu\left(x^{\frac{1}{g}}\right) = \mu(a')$$

si nous désignons par a' la partie entière de la racine $g^{ième}$ de x.

La formule (4) a été aussi donnée par M. Tchebichef qui la démontre directement, chose très-simple à faire [*]. Les formules fondamentales (1) et (2) et la formule dérivée (3) sont entièrement nouvelles.

Lorsqu'on veut calculer $\varphi(x)$ au moyen de la première formule fondamentale, on se trouve arrêté parce qu'on ne connaît pas tous les nombres premiers inférieurs à un nombre donné, et qu'on ne peut les exprimer en fonction de ce nombre; c'est, en effet, ce qu'on devrait savoir faire pour trouver les limites des $\sum$ qui figurent dans la formule

$$(1) \qquad \log\varphi(x) = \log F(x) - \sum \log F\left(\frac{x}{P_k}\right) + \sum \log F\left(\frac{x}{P_k P_{k'}}\right) - \ldots$$

[*] Le Mémoire où M. Tchebichef démontre ce théorème est postérieur à ma première communication à l'Institut, qui a été faite en octobre 1849. Cependant, le savant russe n'ayant pu avoir connaissance de nos méthodes, il est juste de dire que son travail lui appartient en propre.

puisque l'on doit prendre les $\sum$ jusqu'à ce que l'on cesse d'avoir

$$\frac{x}{P_k} \geqq 2, \quad \frac{x}{P_k P_{k'}} \geqq 2, \quad \frac{x}{P_k P_{k'} P_{k''}} \geqq 2, \ldots.$$

Nous substituerons des inégalités à la place de l'égalité (I) et nous commencerons par nous demander si l'expression

$$\text{(II)} \qquad \log F(x) - \sum^n \log F\left(\frac{x}{P_k}\right) + \sum^n \log F\left(\frac{x}{P_k P_{k'}}\right) - \ldots,$$

est plus grande ou plus petite que $\log \varphi(x)$.

L'indice n que nous donnons aux $\sum$ indique qu'il ne faut prendre les valeurs de (k), (k, k'), (k, k', k''), etc., que depuis 1 jusqu'à n; par exemple,

$$\begin{aligned} &\log F(x) - \sum^2 \log F\left(\frac{x}{P_k}\right) + \sum^2 \log F\left(\frac{x}{P_k P_{k'}}\right) \\ &= \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right). \end{aligned}$$

Il est clair que nous supposons n plus petit que le rang du plus grand nombre premier satisfaisant à la condition

$$\frac{x}{P_k} > 2.$$

Dans le cas contraire, l'expression (II) serait exactement égale à $\log \varphi(x)$.

On voit aisément que le nombre des termes de cette expression est toujours 2^n.

Maintenant écrivons

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{aligned} \log \varphi(x) &= \log F(x) - \varepsilon \\ &= \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \varepsilon' \\ &= \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right) - \varepsilon'' \\ &= \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) - \log F\left(\frac{x}{5}\right) \\ &\qquad + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.5}\right) + \log F\left(\frac{x}{3.5}\right) \\ &\qquad - \log F\left(\frac{x}{2.3.5}\right) - \varepsilon'' \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \sum\sum \log F - \varepsilon^n \end{aligned} \right.$$

Nous allons faire voir que

$$\varepsilon > 0, \quad \varepsilon' > 0, \quad \varepsilon'' > 0, \quad \varepsilon''' > 0, \ldots, \quad \varepsilon^{n} > 0:$$

il s'ensuivra que toujours

$$\log \varphi(x) < \sum\sum^{n} \log \mathrm{F}.$$

En se reportant à la formule dérivée (4), on trouve pour $\varphi(x)$ les valeurs suivantes :

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{4}\right)\cdots}.$$

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{\left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{4}\right)\varphi\left(\frac{x}{6}\right)\cdots\right]\left[\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\cdots\right]} = \frac{\mathrm{F}(x)}{\mathrm{F}\left(\frac{x}{2}\right)\left[\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\cdots\right]},$$

de même

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{F}(x)\,\mathrm{F}\left(\frac{x}{2.3}\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{F}\left(\frac{x}{3}\right)\left[\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\varphi\left(\frac{x}{7}\right)\cdots\right]}.$$

et ainsi de suite. Or de là, en prenant les logarithmes, on tire aisément

$$(a')\quad \left\{\begin{aligned}
\varepsilon &= \left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_0 = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\right],\\
\varepsilon' &= \left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_1 = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\varphi\left(\frac{x}{7}\right)\varphi\left(\frac{x}{9}\right)\cdots\right],\\
\varepsilon'' &= \left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_2 = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\varphi\left(\frac{x}{7}\right)\varphi\left(\frac{x}{11}\right)\varphi\left(\frac{x}{13}\right)\cdots\right],\\
\varepsilon''' &= \left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_3 = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{7}\right)\varphi\left(\frac{x}{11}\right)\varphi\left(\frac{1}{13}\right)\varphi\left(\frac{x}{17}\right)\cdots\right].\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varepsilon^{(n)} &= \left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_n = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{\mathrm{P}_{n+1}}\right)\varphi\left(\frac{x}{u_2}\right)\varphi\left(\frac{x}{u_3}\right)\varphi\left(\frac{x}{u_4}\right)\cdots\right].
\end{aligned}\right.$$

Dans l'expression $\left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_n$ les différentes valeurs u_1, u_2, u_3, etc., que reçoit u, ne sont autres que les termes d'une suite dont les premieres différences sont les termes correspondants de la $n^{\text{ième}}$ suite diatomique augmentés chacun d'une unité ; u_1 est toujours égal à P_{n+1}.

Les facteurs sous les signes logarithmiques étant > 1, leurs logarithmes sont positifs. On a donc bien $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$, etc., et

$$(a'')\quad \left\{\begin{aligned}
\log\varphi(x) &< \log F(x)\\
&< \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right)\\
&< \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right)\\
&< \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) - \log F\left(\frac{x}{5}\right)\\
&\qquad + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.5}\right) + \log F\left(\frac{x}{3.5}\right)\\
&\qquad - \log F\left(\frac{x}{2.3.5}\right)\\
&< \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&< \sum\sum^{n} \log F.
\end{aligned}\right.$$

A mesure qu'on prend n plus grand, la complication des seconds membres augmente; mais l'approximation croît en même temps: car, en valeur absolue,

$$\varepsilon > \varepsilon' > \varepsilon'' > \varepsilon''' \ldots > \varepsilon^{n}.$$

On sait qu'en prenant n assez grand, $\varepsilon^{n} = 0$.

On trouverait identiquement par les mêmes raisonnements :

$$(b\quad \left\{\begin{aligned}
\log\mu(x) &= \log\varphi(x) - \eta\\
&= \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \eta'\\
&= \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right) - \eta''\\
&= \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{5}}\right)\\
&\qquad + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.5}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3.5}}\right)\\
&\qquad - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3.5}}\right) - \eta'''\\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&= \sum\sum^{n} \log\varphi - \eta^{n},
\end{aligned}\right.$$

et

$$
(b')\quad \begin{cases}
\eta = \log\left[\mu\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\dots\right] \\
\eta' = \log\left[\mu\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{5}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{7}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{9}}\right)\dots\right] \\
\eta'' = \log\left[\mu\left(x^{\frac{1}{5}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{7}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{11}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{13}}\right)\dots\right] \\
\eta''' = \log\left[\mu\left(x^{\frac{1}{7}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{11}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{13}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{17}}\right)\dots\right] \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\eta^{n} = \log\left[\mu\left(x^{\frac{1}{p_{n+1}}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{u_2}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{u_3}}\right)\dots\right],
\end{cases}
$$

d'où

$$
(b'')\quad \begin{cases}
\log\mu(x) < \log\varphi(x) \\
\qquad < \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \\
\qquad < \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right) \\
\qquad < \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) \\
\qquad\qquad + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.5}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3.5}}\right) \\
\qquad\qquad - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3.5}}\right) \\
\qquad < \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad < \sum\sum^{n} \log\varphi.
\end{cases}
$$

Il semble qu'il soit plus difficile d'obtenir des inégalités en sens contraire de celles que nous avons données jusqu'ici : du moins, nous ne sommes pas parvenus jusqu'à présent à en former qui soient aussi simples et aussi générales que les précédentes; cependant on peut en trouver quelques-unes. Nous allons en donner des exemples; cela est essentiel pour l'établissement de nos théorèmes sur les limites des nombres premiers.

Prenons la $(k+1)^{ième}$ égalité du tableau (a), le reste sera ε^{k}.

Si nous pouvons trouver une fonction connue G_k, variable avec k, et telle que

$$G_k > \varepsilon^{(k)},$$

il est évident que nous aurons

$$\log \varphi(x) > \sum\sum^{k} \log F - G_k.$$

Prenons d'abord la seconde égalité, et cherchons à déterminer une fonction G_1, telle que

$$\log \varphi(x) > \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - G_1.$$

Prenons

$$G_1 = \log F\left(\frac{x}{2}\right) = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{4}\right)\varphi\left(\frac{x}{6}\right)\cdots\right],$$

il est clair que ce produit sera plus grand que le suivant :

$$\varepsilon' = \left[\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right]_1 = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\varphi\left(\frac{x}{7}\right)\cdots\right],$$

puisque chacun des produits élémentaires du premier est supérieur à ceux du second. Donc

$$\log \varphi(x) > \log F(x) - 2\log F\left(\frac{x}{2}\right).$$

Examinons de même la troisième égalité du tableau (a), et cherchons G_2, tel que

$$\log \varphi(x) > \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right) - G_2.$$

En faisant

$$G_2 = \log F\left(\frac{x}{3}\right),$$

nous aurons évidemment

$$G_2 > \varepsilon'',$$

car chacun des facteurs de G_2 (sous le signe log) est supérieur au fac-

teur correspondant de ε'' : j'en conclus que

$$\log \varphi(x) > \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - 2\log F\left(\frac{x}{2}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right).$$

Le choix d'une valeur simple qu'on pourrait attribuer à G_3 offre déjà plus de difficultés. Cela tient à la complication très-rapidement croissante des termes diatomiques u_1, u_2, u_3, etc., qui figurent dans les restes successifs ε, ε', ε'', ε''',..., ε^n, et dont il faudrait suivre les irrégularités avec les multiples d'un nombre aussi petit que possible de nombres choisis à l'avance.

Dans le cas de G_1 et G_2, on a vu que ce nombre se réduit à 1 ; en effet, dans G_1 il a suffi de faire figurer les multiples de 3, et dans G_2 ceux de 5.

Nous reviendrons une autre fois avec plus de détail sur ce sujet qui tient essentiellement à l'étude des suites diatomiques.

§ II.

THÉORÈMES SUR LES LIMITES DES NOMBRES PREMIERS.

Nous allons maintenant appliquer nos méthodes à plusieurs théorèmes sur les nombres premiers. Donnons d'abord, comme exemple de ces recherches, une proposition relative aux fonctions φ. On a toujours

$$\varphi(x^2) > \varphi(x)^2.$$

En effet, si nous désignons, pour abréger, $\dfrac{F(x)}{F\left(\frac{x}{2}\right)}$ par $f_1(x)$ et $\dfrac{F(x)}{F\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ par $f_2(x)$, nous aurons, d'après les théorèmes précédents,

$$f_1(x) > \varphi(x) > f_2(x).$$

Il suffit donc de démontrer que

$$f_2(x^2) > f_1(x)^2.$$

c'est-à-dire que

$$\frac{F(x^2)}{F\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} > \frac{F(x)^2}{F\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Soit d'abord x un entier pair. En substituant aux signes F leurs expressions, il sera facile de vérifier cette inégalité. En effet, on a bien

$$\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\left(\frac{x^2}{2}+2\right)\ldots x^2$$
$$> 1.2.3\ldots\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{x}{2}+2\right)\ldots x\,.\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{x}{2}+2\right)\ldots x.$$

Pour rendre la chose plus sensible, on peut écrire cette inégalité de la façon suivante :

$$\left\{\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\left(\frac{x^2}{2}+2\right)\cdots\frac{x(x+1)}{2}\right\}$$
$$\times\left\{\left[\frac{x(x+1)}{2}+1\right]\cdots\frac{x(x+2)}{2}\left[\frac{x(x+2)}{2}+1\right]\cdots\left[\frac{x(x+x-1)}{2}\right]\right\}$$
$$\times\left\{\left[\frac{x(2x-1)}{2}+1\right]\cdots\frac{x(x+x)}{2}\right\}$$
$$>\left\{\left[1.\left(\frac{x}{2}+1\right)\right]\cdot\left[2.\left(\frac{x}{2}+2\right)\right]\cdot\left[3.\left(\frac{x}{2}+3\right)\right]\cdots\left[\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)\right]\right\}$$
$$\times\left\{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdots\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)^2\right\}$$
$$\times\left\{(x+1)(x+2)\cdots\frac{x.x}{2}\right\}.$$

Chacune des trois accolades du premier membre contient un nombre de facteurs égal à celui de l'accolade correspondante du second, et chacun des facteurs dans le premier membre est égal ou supérieur au facteur correspondant dans le second.

Une méthode analogue établira pour x quelconque cette même inégalité

$$\frac{F(x^2)}{F\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} > \frac{F(x)^2}{F\left(\frac{x}{2}\right)^2}:$$

on a donc bien

$$\varphi(x^2) > \varphi(x)^2.$$

Démontrons maintenant qu'entre un nombre et son carré il y a toujours au moins un nombre premier; il suffira, pour cela, d'établir que

$$\mu(x^2) > \mu(x).$$

Nous avons démontré ci-dessus que

$$\log\varphi(x) > \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - 2\log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right).$$

On a vu aussi que

$$\log\varphi(x) < \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right).$$

Par des raisonnements identiques, on ferait voir que

$$\log\mu(x) > \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - 2\log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right),$$

et

$$\log\mu(x) < \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right),$$

ou bien

$$\mu(x) > \frac{\varphi(x)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right)}{\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)},$$

$$\mu(x) < \frac{\varphi(x)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right)}{\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Posons

$$f_1(x) = \frac{\varphi(x)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right)}{\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)},$$

et

$$f_2(x) = \frac{\varphi(x)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right)}{\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)},$$

alors on voit par ce qui précède que

$$f_1(x) > \mu(x) > f_2(x).$$

Et, pour démontrer que

$$\mu(x^2) > \mu(x),$$

il suffira de prouver que

$$f_2(x^2) > f_1(x),$$

c'est-à-dire (en prenant $x = z^6$) que

$$\frac{\varphi(z^{12})\varphi(z^2)}{\varphi(z^6)\varphi(z^4)^2} > \frac{\varphi(z^6)\varphi(z)}{\varphi(z^3)\varphi(z^2)},$$

ce qui devient

$$\varphi(z^{12})\varphi(z^3)\varphi(z^2)^2 > \varphi(z^6)^2\varphi(z^4)^2\varphi(z).$$

Diminuons les produits élémentaires du premier membre; augmentons les produits élémentaires du deuxième membre; si cette nouvelle inégalité est vraie, la première le sera *à fortiori*. Or

$$\varphi(z^6)^2 < \frac{F(z^6)^2}{F\left(\frac{z^6}{2}\right)^2},$$

$$\varphi(z^4)^2 < \frac{F(z^4)^2}{F\left(\frac{z^4}{2}\right)^2},$$

$$\varphi(z) < \frac{F(z)}{F\left(\frac{z}{2}\right)},$$

et

$$\varphi(z^{12}) > \frac{F(z^{12})}{F\left(\frac{z^{12}}{2}\right)^2},$$

$$\varphi(z^3) > \frac{F(z^3)}{F\left(\frac{z^3}{2}\right)^2},$$

$$\varphi(z^2)^2 > \frac{F(z^2)^2}{F\left(\frac{z^2}{2}\right)^4}.$$

On pourra donc substituer à l'inégalité primitive la suivante

$$\frac{F(z^{12})}{F\left(\frac{z^{12}}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z^3)}{F\left(\frac{z^3}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z^2)^2}{F\left(\frac{z^2}{2}\right)^4} > \frac{F(z^6)^2}{F\left(\frac{z^6}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z^4)^2}{F\left(\frac{z^4}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z)}{F\left(\frac{z}{2}\right)},$$

ou bien, enfin, en remarquant que

$$\frac{F(z^3)}{F\left(\frac{z^3}{2}\right)^2} > 1, \qquad \frac{F(z^2)^2}{F\left(\frac{z^2}{2}\right)^4} > 1,$$

il suffira de vérifier l'inégalité plus simple

$$\frac{F(z^{12})}{F\left(\frac{z^{12}}{2}\right)^2} > \frac{F(z^6)^2}{F\left(\frac{z^6}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z^4)^2}{F\left(\frac{z^4}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z)}{F\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

Supposons d'abord la valeur de z égale à un entier pair En remplaçant les fonctions F par leurs valeurs, il viendra, dans ce cas,

$$\left[\left(\frac{z^{12}}{2}+1\right)\cdots z^{12}\right] > \left[\left(\frac{z^6}{2}+1\right)\cdots z^6\right]^2\left[\left(\frac{z^4}{2}+1\right)\cdots z^4\right]^2\cdots$$
$$\times\left[\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots z\right]\left(1.2.3\ldots\frac{z^{12}}{2}\right).$$

Mais on peut écrire $\left(1.2.3.\ldots\frac{z^{12}}{2}\right)$ de la façon suivante :

$$\left[\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}\right)\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}-1\right)\right]$$
$$\times\left[\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}+1\right)\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}-2\right)\right]\cdots$$
$$\times\left[\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}+2\right)\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}-3\right)\right]\cdots$$
$$\times(z^6+z^4+z)(z^6+z^4+z+1)\cdots\frac{z^{12}}{2}.$$

En substituant cette valeur dans l'inégalité, on reconnaît que le nombre des facteurs dans chacun des membres est le même, et que, de plus, chacun des facteurs du premier membre (en les choisissant convenablement) est plus grand qu'un des facteurs du deuxième membre. La proposition est démontrée.

Nous laissons au lecteur à chercher une démonstration analogue pour le cas de z quelconque.

Dans le compte rendu que nous avons eu l'honneur de lire à l'Académie en 1849, le théorème précédent se trouve énoncé sous une forme différente; on y distingue les cas où le nombre serait premier, puissance de 2 ou quelconque.

Cette distinction se présente, en effet, lorsqu'on emploie pour arriver au théorème une démonstration presque aussi simple que la précédente, mais que nous omettons pour abréger.

Les méthodes exposées dans ce Mémoire conduisent à un grand nombre de conséquences intéressantes sur la théorie si obscure des nombres premiers. Nous nous proposons d'en faire le sujet de recherches ultérieures.

NOTE

SUR

LE *CANON ARITHMETICUS* DE JACOBI,

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

Quand on a trouvé une racine primitive $g < p$ pour le module premier p (calcul susceptible d'abréviation, comme je le montrerai ailleurs), on peut déterminer directement les racines primitives pour le module p^n.

Soit $g' < p^2$ le reste positif de g^p divisé par p^2; faites $h = \frac{g' - g}{p}$: la formule

$$g + px + p^2 y$$

donnera $p^{n-2}(p-1)$ racines primitives, en posant

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad 1, \quad 2, \quad h-1, \quad h+1, \ldots\ldots, \quad p-1, \\ y &= 0, \quad 1, \quad 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad p^{n-2}-1, \end{aligned}$$

et combinant de toutes les manières possibles les valeurs de x et celles de y.

Comme on peut remplacer g par g^i, $i < p-1$ étant premier à $p-1$, c'est-à-dire susceptible de $\varphi(p-1)$ valeurs, le nombre de racines primitives est donc

$$p^{n-2} \cdot p-1 \cdot \varphi(p-1) = \varphi(p^{n-1}) \cdot \varphi(p-1) = \varphi(p^{n-1} \cdot p-1) = \varphi\varphi(p^n),$$

comme on le sait.

L'exclusion de $x = h$ tient à ce que $(g + ph)^{p-1} - 1$ est divisible par p^2.

Jacobi a prouvé que les racines primitives pour le module p^2 le sont aussi pour le module p^n; c'est une conséquence de la règle donnée

plus haut. Il a vérifié que presque toujours les racines pour le module p le sont pour le module p^2.

L'exception tient à ce qu'on peut avoir, mais très-rarement, $h = 0$. Alors g, racine primitive pour le module p, ne l'est pas pour le module p^2.

On peut donc, pour le module p^n, en représentant par a un entier quelconque premier à p^n et plus petit, déterminer un entier α ou $\operatorname{ind} a < p^{n-1}(p-1)$, et tel qu'on ait

$$g^{\operatorname{ind} a} \equiv a \,(\text{mod. } p^n).$$

De là les deux Tables du *Canon :*

L'une donnant $\operatorname{ind} a$ quand on connaît a;

L'autre donnant a quand on connaît $\operatorname{ind} a$.

Comme les congruences

$$g^{\operatorname{ind} a} \equiv a \,(\text{mod. } p^n), \quad g^{\frac{p^{n-1}(p-1)}{2}} \equiv -1 \,(\text{mod. } p^n)$$

donnent

$$g^{\operatorname{ind} a + \frac{p^{n-1}(p-1)}{2}} \equiv (p-a),$$

on reconnaît de suite que les Tables peuvent être réduites *à moitié.*

L'usage principal du *Canon,* c'est la résolution de la congruence

$$ax^m \equiv b \,(\text{mod. } p^n).$$

En effet, si l'on a

$$acd\ldots e \equiv b \,(\text{mod. } p^n),$$

on a aussi par cela même

$$\operatorname{ind} a + \operatorname{ind} c + \ldots + \operatorname{ind} e \equiv \operatorname{ind} b \,(\text{mod. } p^{n-1}.p-1):$$

donc de

$$ax^m \equiv b \,(\text{mod. } p^n)$$

on conclut

$$m \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} b - \operatorname{ind} a \,(\text{mod. } p^{n-1}.p-1).$$

De là directement, ou à l'aide de la Table, on tire $\operatorname{ind} x$, puis x au moyen de la Table. Comme $\operatorname{ind} x$ peut avoir plusieurs valeurs, il en est de même de x.

Le module 2^n ne présente aucune difficulté, et si la Table n'était pas très-peu étendue, il serait également facile de la réduire *à moitié.*

Le *Canon arithmeticus* n'est pas seulement utile pour la résolution numérique de

$$ax^m \equiv b \pmod{p^n}.$$

Ainsi j'ai montré, d'après *Eisenstein*, comment le *Canon* fait connaître les coefficients entiers a_0, a_1, etc., de l'équation

$$p = f(\rho) \cdot f(\rho^{-1}),$$

où

$$\rho^m = 1, \quad p = m\varpi + 1, \quad m > 2,$$
$$f(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_{m-1}\rho^{m-1}.$$

Comme on en tire

$$F(\rho) = [f(\rho)]^k = A_0 + A_1\rho + \ldots + A_{m-1}\rho^{m-1}, \quad p^k = F(\rho) \cdot F(\rho^{-1}),$$

si, dans la décomposition de $2p$ en m carrés, on change a en A, on aura une décomposition correspondante de $2p^k$ en m carrés.

Le *Canon arithmeticus* a été publié *impensis Academiæ litterarum regiæ Borussicæ;* il est très-correct, *cura et benevolentia virorum clarissimorum, Professorum Dirichlet, Dove, Steiner; Doctorum Wolfers, Bremiker, Galle*, sans oublier surtout le célèbre astronome *Encke*, car Jacobi finit son Introduction par ces mots : *Maximas autem gratias ago illustrissimo* Encke *qui et his emendatricibus curis præsidere et summo studio ac benevolentia me egregiis consiliis in adornando opere adjuvare voluit.*

Pourrait-on publier en France, et d'une manière analogue, des Tables d'exponentielles et de logarithmes modulaires (les mêmes sous un autre nom), ces Tables étant modifiées, surtout comme on l'a vu plus haut?

C'est là une question à laquelle je ne saurais trop que répondre.

REMARQUE

Sur l'emploi des intégrales définies pour exprimer les intégrales des équations aux différentielles partielles;

PAR M. DUHAMEL.

Dans un grand nombre de questions de physique mathématique, les fonctions cherchées se trouvent exprimées par des intégrales définies, prises par rapport à des variables auxiliaires. Les dérivées de ces fonctions par rapport aux variables dont elles restent dépendantes après ces intégrations, s'obtiennent en différentiant sous le signe $\int$ les intégrales qui les représentent; et cette opération est soumise, comme on le sait, à certaines exceptions auxquelles il est entendu que l'on aura toujours égard.

L'objet de cette Note est de mettre en garde contre une erreur à laquelle il est assez facile d'être entraîné lorsque les fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales définies, sont discontinues.

Pour que notre idée soit plus facile à saisir, nous prendrons une question extrêmement simple, celle de la propagation du mouvement dans un gaz indéfini; et nous supposerons qu'on la déduise des équations ordinaires de l'hydrodynamique, dans le cas de très-petits mouvements.

L'équation aux différentielles partielles sera, comme on le sait,

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right),$$

a étant une constante donnée; et φ une fonction dont les dérivées

$\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ sont à chaque instant les composantes de la vitesse du point dont les coordonnées sont x, y, z; et $-\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$, la condensation en ce point.

L'intégrale générale de l'équation (1) est

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\mathrm{S}\, t d\omega \psi(x + at\cos\alpha,\ y + at\cos\beta,\ z + at\cos\gamma)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\mathrm{S}\, t d\omega \mathrm{F}(x + at\cos\alpha,\ y + at\cos\beta,\ z + at\cos\gamma);$$

$d\omega$ désigne un élément quelconque de la sphère décrite avec le rayon 1, du point x, y, z comme centre; $-\frac{1}{a^2}\psi(x, y, z)$ représente la condensation, et $\mathrm{F}(x, y, z)$ la valeur de φ en chaque point du milieu, dans l'état initial; les sommes S s'étendent à tous les éléments $d\omega$ de la sphère.

Toutefois, comme les fonctions ψ et F seront nulles lorsque $x + at\cos\alpha$, $y + at\cos\beta$, $z + at\cos\gamma$ seront les coordonnées d'un point où la condensation et la vitesse seraient nulles dans l'état initial, ce qui pourra arriver quand l'ébranlement initial sera limité, on voit qu'il suffira pour effectuer ces sommations de considérer les directions des droites menées du point quelconque x, y, z que l'on considérera, aux différents points de la sphère décrite de ce point avec le rayon at, qui se trouveront compris dans l'ébranlement primitif. Les valeurs α, β, γ, qui correspondraient à d'autres directions, donneraient pour l'intégrale des éléments nuls.

Mais pour ne pas compliquer inutilement les calculs, nous supposerons que les fonctions F et ψ ne dépendent que d'une seule coordonnée x, et même que la fonction F soit nulle : ce qui revient à admettre que la vitesse initiale est nulle en chaque point, et que la condensation est la même en tous les points d'un plan quelconque perpendiculaire à l'axe des x.

La valeur de φ se trouvera ainsi réduite à la forme suivante :

$$(2)\qquad \varphi = \frac{1}{4\pi}\mathrm{S}\, t d\omega \psi(x + at\cos\alpha).$$

Dans le cas simple que nous traitons, la valeur de φ pourrait être débarrassée de tout signe d'intégration, et être mise sous la forme

$$(3) \qquad \varphi = \frac{-\psi_1(x-at)+\psi_1(x+at)}{2a},$$

ψ_1 désignant une fonction dont la dérivée est ψ. Mais nous lui conservons la forme (2), parce que nos remarques portent sur l'emploi des intégrales définies; et nous prenons ce cas simple pour les faire saisir plus facilement. La vitesse v en un point et à une époque quelconque est représentée par $\frac{d\varphi}{dx}$. On aura donc, en différentiant sous le signe $\mathbf{S}$ la formule (2),

$$(4) \qquad v = \frac{1}{4\pi}\mathbf{S}\, t d\omega \psi'(x+at\cos\alpha),$$

cette somme s'étendant toujours à tous les éléments $d\omega$ de la sphère déjà désignée.

Nous allons maintenant remplacer $d\omega$ par sa valeur en fonction de α.

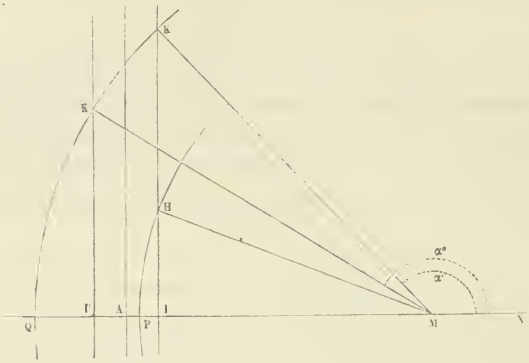
En considérant, sur la sphère dont $d\omega$ est l'élément, une zone infiniment petite, comprise entre deux surfaces coniques ayant même centre que la sphère, l'axe des x pour axe commun, et dont les génératrices forment, respectivement avec la direction des x positifs, les angles α et $\alpha + d\alpha$, les éléments $d\omega$ de cette zone se rapporteront à une même valeur de $\psi(x+at\cos\alpha)$, et leur somme sera égale à $2\pi\sin\alpha d\alpha$. D'où il suit que les formules (2) et (4) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(5) \qquad \varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi t\sin\alpha\psi(x+at\cos\alpha)\,d\alpha,$$

$$(6) \qquad v = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2}\int_0^\pi t\sin\alpha\psi'(x+at\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Supposons maintenant que l'ébranlement initial soit compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x situés de part et d'autre de l'origine, à une distance ε : la fonction ψ, ainsi que ses dérivées, seront

égales à zéro quand la variable à laquelle elles s'appliqueront ne sera pas comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$.



Considérons un point M situé en dehors de l'ébranlement primitif II', et calculons sa vitesse pour une valeur quelconque de t. Tant que l'on aura $at <$ MI, ou $x - \varepsilon$, la sphère décrite du centre M avec le rayon at ne pénétrera pas dans l'ébranlement initial; la fonction ψ' sera donc nulle dans toute l'étendue de l'intégrale, et la vitesse sera nulle. Lorsque at sera compris entre MI et MI' et par exemple égal à MP, la sphère de rayon at aura une zone à une seule base, comprise dans l'ébranlement initial, et les valeurs de α devront être considérées seulement entre les limites HMX et π. Or

$$\int t \sin\alpha \, d\alpha \, \psi'(x + at\cos\alpha) = -\frac{\psi(x + at\cos\alpha)}{a};$$

à la limite HMX, $x + at\cos\alpha$ devient $x -$ MI ou ε; à la limite π, $x + at\cos\alpha$ devient $x - at$: on aurait donc

$$(7) \qquad v = -\frac{1}{2a}\psi(x - at) + \frac{1}{2a}\psi(\varepsilon).$$

Enfin, quand on aura $at >$ MI', égal par exemple à MQ, la sphère décrite du centre M avec ce rayon aura une zone à deux bases com-

prises dans l'ébranlement primitif; les valeurs de α qui ne donneront pas des éléments nuls pour l'intégrale seront comprises entre KMX et K'MX : pour ces limites, les valeurs de $x + at \cos\alpha$ seront respectivement ε et $-\varepsilon$, et l'on aurait pour valeur la vitesse

$$(8) \qquad v = \frac{1}{2a}[-\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon)],$$

ce qui annoncerait que le point M ne retomberait pas au repos, mais finirait par acquérir cette vitesse constante; d'où il résulterait que le fluide indéfini acquerrait une vitesse finie constante, par suite d'un ébranlement initial limité, ce qui est impossible.

Ces résultats ne sont pas d'accord avec ceux que fournit l'intégrale sous forme finie, représentée par la formule (3), qui donne

$$v = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{-\psi(x-at) + \psi(x+at)}{2a}:$$

d'où résulte, dans le cas de $at = \mathrm{MP}$,

$$(9) \qquad v = \frac{-\psi(x-at)}{2a},$$

expression différente de (7), et, dans le cas de $at = \mathrm{MQ}_1$,

$$(10) \qquad v = 0,$$

ce qui annonce que le point M retombe pour toujours au repos, après un temps égal à $\frac{x+\varepsilon}{a}$.

Il s'agit maintenant de reconnaître comment s'est introduite l'erreur qui affecte les résultats (7) et (8).

Considérons, en premier lieu, le cas de $at = \mathrm{MQ}$, et soient

$$\mathrm{KMX} = \alpha', \quad \mathrm{K'MX} = \alpha'';$$

l'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{\alpha''} t \sin\alpha\,\psi(x + at\cos\alpha)\,d\alpha;$$

mais alors les limites de l'intégrale ne sont pas indépendantes de x: et pour avoir $\frac{d\varphi}{dx}$ il ne suffit pas d'intégrer entre α' et α'' la quantité

sous le signe $\int$, différentiée par rapport à x; il faut encore y joindre deux termes provenant du changement des limites.

Ces deux termes, qui ont été omis dans le calcul précédent, sont

$$\frac{1}{2}\frac{d\alpha''}{dx}\cdot t\sin\alpha''\psi(x+at\cos\alpha'')$$

et

$$-\frac{1}{2}\frac{d\alpha'}{dx}\cdot t\sin\alpha'\psi(x+at\cos\alpha').$$

Or on a

$$-\cos\alpha''=\frac{x+\varepsilon}{at},\quad -\cos\alpha'=\frac{x-\varepsilon}{at},$$

d'où

$$\sin\alpha''\frac{d\alpha''}{dx}=\frac{1}{at},\quad \sin\alpha'\frac{d\alpha'}{dx}=\frac{1}{at},$$

ce qui donne pour la somme des deux termes omis

$$\frac{1}{2a}\psi(-\varepsilon)-\frac{1}{2a}\psi(\varepsilon).$$

C'est cela qu'il faut ajouter à l'expression (8), relative au cas de $at=\mathrm{MQ}$ pour avoir un résultat exact, et l'on trouve alors

$$v=0,$$

ce qui s'accorde avec l'équation (10) qui résultait de l'intégrale sous forme finie.

Soit maintenant le cas de $at=\mathrm{MP}$; on a alors, en faisant $\mathrm{HMX}=\alpha_1$,

$$\varphi=\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\pi}t\sin\alpha\psi(x+at\cos\alpha)\,d\alpha$$

et

$$-\cos\alpha_1=\frac{x-\varepsilon}{at},\quad \sin\alpha_1\frac{d\alpha_1}{dx}=\frac{1}{at}.$$

Pour avoir la valeur exacte de $\frac{d\varphi}{dx}$, il faut d'abord différentier par rapport à x sous le signe $\int$, puis intégrer entre les limites α_1 et π, et ensuite ajouter

$$-\frac{1}{2}\frac{d\alpha_1}{dx}\cdot t\sin\alpha_1\psi(x+at\cos\alpha_1),$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2a}\psi(\varepsilon):$$

c'est donc ce dernier terme qu'on avait omis, en formant l'expression (7); en l'y ajoutant, elle devient

$$v = -\frac{1}{2a}\psi(x - at)$$

et coïncide avec la formule (9) à laquelle conduit l'intégrale sous forme finie.

On voit par là qu'il ne suffit pas de différentier sous le signe $\int$, et d'intégrer entre les valeurs des angles qui correspondent aux limites de la partie de sphère comprise dans l'ébranlement primitif. Il faut s'assurer si ces valeurs changent avec la variable par rapport à laquelle on différentie, et, dans ce cas, ajouter les termes indiqués par la théorie ordinaire.

Remarque. Dans le cas de discontinuité que nous venons d'examiner, on aurait pu, au lieu des limites α', α'', considérer les limites extrêmes o et π de l'angle α. Il n'y aurait pas eu alors de difficultés relatives à la variation des limites; mais on se trouverait dans le cas d'exception où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie. En effet, on peut regarder la fonction $\psi(u)$ comme passant de o à $\psi(\varepsilon)$ dans un intervalle infiniment petit δ, lorsque l'on fait décroître u depuis l'infini positif. La dérivée $\psi'(u)$ est donc nulle jusqu'à $u = \varepsilon$; puis elle varie très-rapidement dans l'intervalle δ, puisque sa valeur moyenne est égale à l'accroissement de la fonction $\psi(u)$ divisée par δ, ou $\frac{\psi(\varepsilon)}{\delta}$. En faisant tendre δ vers zéro, il est clair que $\psi'(u)$ doit être regardé comme infini pour $u = \varepsilon$; et $\int \psi'(u)\,du$ comme égal à $\psi(\varepsilon)$ dans l'intervalle δ.

Ainsi, dans l'intégration de l'expression (6), il faudra, lorsque α sera arrivé de o à α', considérer $\psi'(x + at\cos\alpha)$, qui a été nul jusque là, comme étant infini; et l'intégrale $-\int at\sin\alpha\,d\alpha\,\psi'(x + at\cos\alpha)$

qui remplace $\int \psi'(u)\,du$, comme acquérant brusquement une valeur égale à $\psi(\varepsilon)$. On devra ensuite intégrer de α' à α'', comme on l'a fait pour obtenir la formule (8). Enfin, lorsque α sera devenu égal à α'', il se présentera les mêmes observations à faire que pour $\alpha = \alpha'$, et l'on devra ajouter le terme $-\psi(-\varepsilon)$; de sorte que l'intégrale (6) qui doit donner la valeur de v, se composera de l'expression (8) à laquelle on ajoutera

$$-\frac{1}{2a}\left[\psi(\varepsilon) - \psi(-\varepsilon)\right],$$

ce qui donnera zéro, comme cela devait être.

NOTE

SUR

UNE PROPRIÉTÉ D'UN SYSTÈME DE QUATRE CONIQUES;

PAR M. WOEPCKE.

Dans un remarquable Mémoire sur les propriétés des courbes du quatrième ordre, inséré dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 16 août 1853, M. Chasles énonce le théorème suivant :

Étant pris sur une conique S *deux systèmes de quatre points* a, b, c, d et a', b', c', d', *et étant menées par les quatre premiers points deux coniques quelconques* A, A', *et par les quatre autres deux coniques quelconques* B, B'; *les quatre points d'intersection des deux coniques* A, B, *et ceux des deux coniques* A', B' *sont huit points situés sur une même conique* Σ.

Ce théorème et son corrélatif ont fait partie du Cours de Géométrie supérieure professé à la Sorbonne, dans lequel cette propriété de trois coniques (S, A, A') donne lieu à des conséquences nombreuses qui sont l'expression d'importantes propriétés des courbes du second degré.

C'est en prenant pour point de départ ce même théorème, et en mettant en présence, dans un même plan, quatre coniques quelconques au lieu de trois, que je suis parvenu à quelques développements qui forment le sujet de la présente Note.

THÉORÈME.

Si l'on a trois coniques quelconques C_1, C_2, C_3, *lesquelles sont rencontrées par une quatrième conique quelconque* U *en trois systèmes de*

quatre points, et si l'on fait passer par ces trois systèmes de quatre points trois coniques A_1, A_2, A_3 *respectivement; les huit points d'intersection de* C_1 *avec* C_2 *et de* A_1 *avec* A_2 *sont* (en vertu du théorème ci-dessus) *sur une conique* Σ_3, *les huit points d'intersection de* C_1 *avec* C_3 *et de* A_1 *avec* A_3 *sur une conique* Σ_2, *et les huit points d'intersection de* C_2 *avec* C_3 *et de* A_2 *avec* A_3 *sur une conique* Σ_1. *Je dis que les trois coniques* Σ_1, Σ_2, Σ_3 *passent par quatre mêmes points (et conséquemment sont rencontrées par une transversale quelconque en six points en involution).*

En effet, les équations des quatre coniques proposées étant

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad U = 0,$$

les équations des coniques A seront respectivement

$$A_1 = U + \lambda_1 C_1 = 0,$$
$$A_2 = U + \lambda_2 C_2 = 0,$$
$$A_3 = U + \lambda_3 C_3 = 0.$$

Il est évident alors que les coniques

$$\Sigma_3 = \lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 = 0,$$
$$\Sigma_2 = \lambda_1 C_1 - \lambda_3 C_3 = 0,$$
$$\Sigma_1 = \lambda_2 C_2 - \lambda_3 C_3 = 0,$$

passent respectivement par les intersections de C_1, C_2 et A_1, A_2, de C_1, C_3 et A_1, A_3, de C_2, C_3 et A_2, A_3. Mais il est également évident que chacune des trois coniques Σ passe par les points d'intersection des deux autres. Donc.... C. Q. F. D.

AUTRE ÉNONCÉ.

Si l'on a trois coniques quelconques C_1, C_2, C_3 *qui sont rencontrées par une quatrième conique quelconque en trois systèmes de quatre points, et si l'on fait passer par ces trois systèmes de quatre points trois coniques* A_1, A_2, A_3 *respectivement; les huit points d'intersection de* C_1 *avec* C_2 *et de* A_1 *avec* A_2 *sont sur une conique* Σ_3, *les huit points d'intersection de* C_1 *avec* C_3 *et de* A_2 *avec* A_3 *sur une conique* Σ_1, *et les*

douze points d'intersection de C_1 *avec* C_3, *de* A_1 *avec* A_3 *et de* Σ_1 *avec* Σ_3 *sur une conique* Σ_2.

Si l'on se donne un point p par lequel doivent passer les trois coniques A, les trois coniques Σ passent par ce même point. Dès qu'on se donne ce point, les trois coniques Σ sont déterminées, et les trois coniques A ont deux à deux trois intersections, outre p, sur une conique Σ respectivement.

COROLLAIRES.

1. Si deux des coniques C, soient C_1 et C_2, sont des cercles, la conique Σ_3 est également un cercle; donc les dix points d'intersection de C_1 avec C_2, de A_1 avec A_2 et de Σ_1 avec Σ_2 sont situés sur un cercle.

Si les trois coniques C sont des cercles, les coniques Σ sont également trois cercles qui passent par deux mêmes points.

2. En prenant pour U et pour les trois coniques A des systèmes de deux droites, on obtient ceci :

Si l'on coupe trois coniques C_1, C_2, C_3 par deux transversales, on aura sur C_1 quatre points d'intersection que l'on pourra joindre deux à deux par deux droites l_1, l'_1, de même sur C_2 quatre points d'intersection qui donnent lieu à deux droites l_2, l'_2, et sur C_3 quatre points d'intersection qui donnent lieu à deux droites l_3, l'_3; les points d'intersection de l_1, l'_1 avec l_2, l'_2 et de C_1 avec C_2 sont sur une conique Σ_3, les points d'intersection de l_1, l'_1 avec l_3, l'_3 et de C_1 avec C_3 sur une conique Σ_2, les points d'intersection de l_2, l'_2 avec l_1, l'_3 et de C_2 avec C_3 sur une conique Σ_1, et les trois coniques Σ passent par quatre mêmes points.

3. En prenant pour U deux droites coïncidentes, on obtient :

Si l'on a trois coniques C_1, C_2, C_3 ayant avec trois autres coniques A_1, A_2, A_3 respectivement un double contact sur une même droite; les points d'intersection de C_1 avec C_2 et de A_1 avec A_2 sont sur une conique Σ_3, les points d'intersection de C_1 avec C_3 et de A_1 avec A_3 sur une conique Σ_2, et les points d'intersection de C_2 avec C_3, de A_2 avec A_3 et de Σ_2 avec Σ_3 sur une conique Σ_1.

Si l'on coupe trois coniques quelconques par une transversale, et si

l'on mène les tangentes aux points de contact; les trois angles circonscrits déterminent deux à deux trois quadrilatères tels, que par les sommets de chaque quadrilatère et les quatre points d'intersection des deux coniques tangentes à ses côtés opposés on peut mener une conique Σ, et que ces trois coniques Σ passent par quatre mêmes points.

4. Si l'on a trois cercles quelconques et une conique U, et si par le point de concours des trois axes radicaux des trois cercles on mène trois coniques passant respectivement par les points d'intersection de U avec chacun des trois cercles, ces trois coniques sont homothétiques.

Et si l'on fait passer par le point de concours des trois axes radicaux de trois cercles trois coniques ayant avec les trois cercles respectivement un double contact sur une même droite, ces trois coniques sont homothétiques.

5. Étant donnée une conique U, si par un point quelconque p on mène trois couples de droites, et si l'on fait passer trois coniques A_1, A_2, A_3 par les intersections de U avec les trois couples de droites respectivement; les trois coniques A ont, deux à deux, un couple de cordes communes (réelles ou imaginaires) passant par le point p, et ces trois couples forment un faisceau de six droites en involution

Et si l'on a trois coniques A, ayant chacune, avec une quatrième conique U, un double contact, de telle sorte que les trois cordes de contact concourent en un même point; les trois coniques A auront, deux à deux, un couple de cordes communes concourant en ce même point, et ces trois couples de cordes communes formeront un faisceau en involution.

THÉORÈME CORRÉLATIF.

Étant données quatre coniques U, C_1, C_2, C_3, *si dans les trois quadrilatères circonscrits à* U *et* C_1, *à* U *et* C_2, *à* U *et* C_3, *on inscrit trois coniques* A_1, A_2, A_3 *respectivement; les huit tangentes communes à* C_1 *et* C_2, *et à* A_1 *et* A_2, *les huit tangentes communes à* C_2 *et* C_3, *et à* A_2 *et* A_3, *enfin les huit tangentes communes à* C_1 *et* C_3, *et à* A_1 *et* A_3 *sont respectivement tangentes à trois coniques* Σ_3, Σ_1, Σ_2 *qui sont inscrites dans un même quadrilatère* (*et conséquemment six tangentes menées*

d'un point quelconque aux trois coniques Σ *forment un faisceau en involution*).

Si l'on se donne une droite L que doivent toucher les trois coniques A, les trois coniques Σ sont également tangentes à cette droite. Dès qu'on se donne cette droite, les trois coniques Σ sont déterminées, et les trois coniques A ont, deux à deux, trois tangentes communes, outre L, qui sont tangentes en même temps à une conique Σ respectivement.

COROLLAIRES.

1. Faisant passer la droite L à l'infini, on obtient que :

Si, dans les trois quadrilatères circonscrits à une conique U et à trois coniques C_1, C_2, C_3 respectivement, on inscrit trois paraboles A_1, A_2, A_3; les trois systèmes de sept tangentes communes à deux coniques C et aux deux paraboles correspondantes enveloppent respectivement trois paraboles Σ, qui sont inscrites dans un même triangle.

2. Prenant pour les trois coniques C trois droites limitées, et pour les coniques A des diagonales des quadrilatères formés par les tangentes menées à U des extrémités de chacune des trois droites C respectivement, on obtient que :

Si trois quadrilatères quelconques sont circonscrits à une même conique U, en joignant dans ces quadrilatères, pris deux à deux, les sommets opposés de l'un à ceux de l'autre, on obtient trois systèmes de huit droites, tangentes respectivement à trois coniques Σ, qui sont inscrites dans un même quadrilatère.

3. Prenant pour U une droite limitée, ou un système de deux points u et u', on obtient :

Si, de deux points quelconques, on mène trois systèmes de quatre tangentes à trois coniques C_1, C_2, C_3 respectivement, et si l'on inscrit dans les trois quadrilatères ainsi formés trois coniques A_1, A_2, A_3; les huit tangentes communes à C_1 et C_2 et à A_1 et A_2, les huit tangentes communes à C_2 et C_3 et à A_2 et A_3, et les huit tangentes communes à C_1 et C_3 et à A_1 et A_3 enveloppent respectivement trois coniques Σ_3, Σ_1, Σ_2 inscrites dans un même quadrilatère.

Si l'on fait coïncider les deux points u, u' en un seul U, les coni-

ques A ont un double contact avec les coniques C aux points de contact des tangentes menées à ces dernières du point U, et en prenant en particulier, pour les coniques A, les cordes de contact, on obtient que :

Si, d'un point U, on mène à trois coniques C_1, C_2, C_3 les six tangentes dont les six points de contact soient a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3, a'_3; les quatre tangentes communes à C_1 et C_2, et les quatre côtés du quadrilatère $a_1 a_2 a'_1 a'_2$, puis les quatre tangentes communes à C_2 et C_3, et les quatre côtés du quadrilatère $a_2 a_3 a'_2 a'_3$, enfin les quatre tangentes communes de C_1 et C_3, et les quatre côtés du quadrilatère $a_1 a_3 a'_1 a'_3$ forment trois systèmes de huit droites, enveloppant respectivement trois coniques Σ, qui sont inscrites dans un même quadrilatère.

4. Si C_1, C_2, C_3 sont trois coniques homofocales, tandis que U est une conique quelconque, on subit une des modifications particulières considérées dans le corollaire précédent, les trois quadrilatères circonscrits aux coniques A, prises deux à deux, ou déterminés par les extrémités des cordes de contact $a_1 a'_1$, $a_2 a'_2$, $a_3 a'_3$, prises deux à deux, sont circonscrits respectivement à trois coniques Σ, qui sont homofocales entre elles, et homofocales aussi aux coniques C.

De même, en considérant deux coniques homofocales C_1, C_2, et prenant pour C_3 leur excentricité commune, les trois coniques Σ sont homofocales entre elles et aux deux coniques proposées C_1, C_2. En ce cas, si l'on prend pour U un point et pour les coniques A les cordes de contact, une des coniques A et deux des coniques Σ se réduisent à l'excentricité commune de C_1 et C_2.

5. En prenant pour C_1, C_2, C_3 trois coniques ayant un double contact avec U, et pour les coniques A les trois pôles de contact, on obtient que :

Si trois coniques C_1, C_2, C_3 ont chacune un double contact avec une quatrième conique U, les pôles de contact étant A_1, A_2, A_3 respectivement, et si l'on construit une conique Σ_3 tangente aux quatre tangentes communes de C_1 et C_2 et à la droite $A_1 A_2$, une conique Σ_2 tangente aux quatre tangentes communes de C_1 et C_3 et à la droite $A_1 A_3$, et une conique Σ_1 tangente aux quatre tangentes communes de C_2 et C_3 et à

la droite $A_2 A_3$, les trois coniques Σ sont inscrites dans un même quadrilatère.

6. Étant données deux coniques homofocales C_1, C_2 et deux coniques quelconques U, C_3, si l'on inscrit dans les trois quadrilatères circonscrits à U et C_1, à U et C_2, et à U et C_3, respectivement, trois coniques A_1, A_2, A_3; les huit tangentes communes à C_1 et C_3, et à A_1 et A_3 seront tangentes à une conique Σ_2, les huit tangentes communes à C_2 et C_3, et à A_2 et A_3 seront tangentes à une conique Σ_1, et *les huit tangentes communes à* A_1 *et* A_2, *et à* Σ_1 *et* Σ_2 *seront tangentes à une conique homofocale à* C_1 *et* C_2.

Et, étant données deux coniques homofocales C_1, C_2 et une conique quelconque C_3, si l'on prend sur cette dernière deux points quelconques u, u', le pôle de la droite uu', par rapport à C_3, étant A_3, et si l'on inscrit, dans les deux quadrilatères qu'on obtient en menant de u et u', les tangentes à C_1 et C_2, deux coniques A_1 et A_2; on pourra inscrire, dans le quadrilatère circonscrit à C_1 et C_3, une conique Σ_2 ayant un double contact avec A_1, les tangentes aux points de contact concourant au point A_3; de même, dans le quadrilatère circonscrit à C_2 et C_3, une conique Σ_1 ayant un double contact avec A_2, les tangentes aux points de contact concourant également au point A_3, et, en outre, les huit tangentes communes à A_1 et A_2, et à Σ_1 et Σ_2 seront tangentes à une conique homofocale à C_1 et C_2.

On voit en même temps que deux sommets opposés, soient a_1, a'_1, du quadrilatère formé par les tangentes menées de u, u' à C_1, et deux sommets opposés, soient a_2, a'_2, du quadrilatère formé par les tangentes menées de u, u' à C_2 sont situés respectivement sur deux coniques Σ_1, Σ_2, inscrites dans les quadrilatères circonscrits à C_2, C_3, et à C_1, C_3, que les tangentes menées par les sommets a aux coniques Σ_1, Σ_2 concourent au point A_3, et que les quatre tangentes communes à Σ_1 et Σ_2, conjointement avec les quatre côtés du quadrilatère $a_1 a_2 a'_1 a'_2$, sont huit tangentes d'une même conique homofocale à C_1 et C_2.

7. Étant données deux coniques homofocales C_1, C_2, une conique quelconque C_3, et une conique U ayant un double contact avec C_1, si l'on inscrit dans les deux quadrilatères circonscrits à U et C_2, et à U et C_2, respectivement, deux coniques A_2, A_3; les huit tangentes com-

munes à C_2 et C_3 et à A_2 et A_3 seront tangentes à une conique Σ_1, les quatre tangentes communes à C_1 et C_3 seront tangentes à une conique Σ_2 ayant un double contact avec A_3, et dont les tangentes aux points de contact concourent au pôle de contact A_1 de U et C_1, et *les quatre tangentes communes de* Σ_1 *et* Σ_2 *seront tangentes à une conique homofocale à* C_1 *et* C_2, *ayant un double contact avec* A_2, *et dont les tangentes aux points de contact concourent au point* A_1 [*].

Et, étant données deux coniques homofocales C_1, C_2 et une conique quelconque C_3, si l'on prend sur l'une des deux coniques homofocales, soit C_1, deux points quelconques u_1, u'_1, et si l'on prend, dans les deux quadrilatères déterminés par les tangentes menées de u_1 et u'_1 à C_2 et C_3, deux couples de sommets opposés, soient a_2, a'_2 et a_3, a'_3; les quatre tangentes communes à C_2 et C_3, et les quatre côtés du quadrilatère $a_2 a_3 a'_2 a'_3$, seront tangentes à une conique Σ_1, les quatre tangentes communes à C_1 et C_3 seront tangentes à une conique Σ_2 passant par a_3, a'_3, et dont les tangentes en ces deux points concourent au pôle A_1 de la droite $u_1 u'_1$ par rapport à C_1; enfin, les quatre tangentes communes à Σ_1 et Σ_2 seront tangentes à une conique Σ_3 homofocale à C_1 et C_2, passant par les deux sommets a_2, a'_2, et dont les tangentes en ces deux points concourent au point A_1.

Et, étant données deux coniques quelconques C_2, C_3 et une conique U passant par les foyers f, f' de C_2, si l'on inscrit, dans les deux quadrilatères circonscrits à U et C_2 et à U et C_3 respectivement, deux coniques A_2 et A_3; les huit tangentes communes à C_2 et C_3, et à A_2 et A_3 seront tangentes à une conique Σ_1, les quatre tangentes, menées de f et f' à C_3, seront tangentes à une conique Σ_2 ayant un double contact avec A_3, et dont les tangentes au point de contact concourent au pôle de contact A_1 de ff' par rapport à U; enfin les quatre tangentes communes à Σ_1 et Σ_2 seront tangentes à une conique homofocale à C_2, ayant un double contact avec A_2, et dont les tangentes aux points de contact concourent également au point A_1.

Observons encore que le théorème qui vient d'être discuté est sa

[*] En vertu d'un des corollaires du théorème ci-dessus cité de M. Chasles relatif à un système de trois coniques, on pourra prendre pour la conique A_2 un cercle ayant son centre au point A_1.

propre réciproque, ou que les coniques qu'on y met en présence peuvent changer de rôles. De sorte qu'en se donnant arbitrairement Σ_3, Σ_2, C_1, A_1, et en faisant passer par les points d'intersection de Σ_3 avec Σ_2, avec C_1 et avec A_1, respectivement, trois coniques Σ_1, C_2, A_2; les intersections de Σ_2 avec C_1 et de Σ_1 avec C_2 sont sur une conique C_3, les intersections de Σ_2 avec A_1 et de Σ_1 avec A_2 sur une conique A_3, et les intersections de C_1 avec A_1, de C_2 avec A_2, et de C_3 avec A_3 sur une conique U.

APPLICATIONS AUX CÔNES DU SECOND DEGRÉ ET AUX CONIQUES SPHÉRIQUES.

Prenant un point quelconque s dans l'espace, on peut considérer les coniques qui se présentent dans les théorèmes précédents comme les traces que forment, sur un plan coupant, autant de cônes du second degré, ayant tous pour sommet le point s; à la place des quatre points d'intersection de deux coniques, on aura les quatre arêtes d'intersection de deux cônes, et, à la place du quadrilatère circonscrit à deux coniques, l'angle tétraèdre circonscrit à deux cônes. En coupant tous ces cônes par une sphère décrite du centre s, on voit que *le théorème et le théorème corrélatif énoncés ci-dessus, relativement à quatre coniques quelconques dans le plan, ont lieu également pour un système de quatre coniques sphériques.*

COROLLAIRES.

1. Si l'on a trois couples de coniques sphériques homocycliques A_1 et C_1, A_2 et C_2, A_3 et C_3, les huit points d'intersection de C_1 avec C_2 et de A_1 avec A_2 sont sur une conique sphérique Σ_3, les huit points d'intersection de C_1 avec C_3 et de A_1 avec A_3 sur une conique sphérique Σ_2, et les douze points d'intersection de C_2 avec C_3, de A_2 avec A_3, et de Σ_2 avec Σ_3 sur une conique sphérique Σ_1.

2. Si l'on a deux coniques sphériques homocycliques U et A_1, et deux coniques sphériques quelconques C_2, C_3, et si, par les intersections de U avec C_2 et C_3 respectivement, on fait passer deux coniques sphériques A_2 et A_3, les huit points d'intersection de C_2 avec C_3 et de A_2 avec A_3 seront sur une conique sphérique Σ_1, les quatre points d'intersection de A_1 avec A_2 sur une conique Σ_3 homocyclique à C_2, et

les huit points d'intersection de A_1 avec A_3 et de Σ_1 avec Σ_3 sur une conique Σ_2 homocyclique à C_2.

3. Si l'on a trois couples de coniques sphériques homofocales A_1 et C_1, A_2 et C_2, A_3 et C_3, il existera une conique sphérique Σ_3 inscrite à la fois dans les deux quadrilatères sphériques circonscrits à A_1 et A_2, et à C_1 et C_2 respectivement, une conique sphérique Σ_2 inscrite à la fois dans les deux quadrilatères sphériques circonscrits à A_1 et A_3, et à C_1 et C_3 respectivement, et une conique sphérique Σ_1 inscrite à la fois dans les trois quadrilatères sphériques circonscrits à A_2 et A_3, à C_2 et C_3, et à Σ_2 et Σ_3 respectivement.

4. Si l'on a deux coniques sphériques homofocales U et A_1 et deux coniques sphériques quelconques C_2, C_3, et si, dans les quadrilatères sphériques circonscrits à U et C_2, et à U et C_3 respectivement, on inscrit deux coniques sphériques A_2 et A_3; les deux quadrilatères sphériques circonscrits à C_2 et C_3, et à A_2 et A_3 respectivement seront circonscrits à une même conique Σ_1; le quadrilatère sphérique circonscrit à A_1 et A_2 sera circonscrit à une conique Σ_3 homofocale à C_2, et les deux quadrilatères sphériques circonscrits à A_1 et A_3, et à Σ_1 et Σ_3 seront circonscrits à une même conique Σ_2 homofocale à C_3.

5. Si l'on a sur la sphère un petit cercle quelconque C_1 et deux couples de coniques homofocales A_2 et C_2, et A_3 et C_3, et si l'on mene par le pôle du petit cercle de grands cercles tangents à A_2 et A_3, dont les points de contact soient respectivement a_2, a'_2 et a_3, a'_3; on peut inscrire, dans le quadrilatère sphérique circonscrit à C_1 et C_2, une conique sphérique Σ_3 ayant un double contact avec A_2 aux points a_2 et a'_2; de même, dans le quadrilatère sphérique circonscrit à C_1 et C_3, une conique sphérique Σ_2 ayant un double contact avec A_3 aux points a_3 et a'_3, et, en outre, les trois quadrilateres sphériques circonscrits à C_2 et C_3, A_2 et A_3, et Σ_2 et Σ_3 respectivement sont circonscrits à une même conique Σ_1.

On pourrait déduire encore beaucoup d'autre corollaires, que j'omets, de crainte de donner trop d'étendue à cette Note.

THÉORÈME GÉNÉRAL.

Etant donnée une conique U, *si l'on prend sur* U *n systèmes de quatre points, et si l'on fait passer par chaque système de quatre*

points un couple de coniques C *et* A; *en prenant deux couples quelconques,* C_α, A_α *et* C_β, A_β, *les huit points d'intersection de* C_α *avec* C_β, *et de* A_α *avec* A_β *seront sur une conique* $\Sigma_{\alpha,\beta}$, *qui passe, en outre, par les points d'intersection de* $n-2$ *couples de coniques* Σ, *savoir, par les points d'intersection de* $\Sigma_{1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{1,\beta}$, *de* $\Sigma_{2,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{2,\beta}, \ldots$, *de* $\Sigma_{\alpha-1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{\alpha-1,\beta}$, *de* $\Sigma_{\alpha+1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{\alpha+1,\beta}, \ldots$, *de* $\Sigma_{\beta-1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{\beta-1,\beta}$, *de* $\Sigma_{\beta+1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{\beta+1,\beta}, \ldots$, *de* $\Sigma_{n-1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{n-1,\beta}$, *et de* $\Sigma_{n,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{n,\beta}$.

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement de l'inspection des équations suivantes :

$$
\begin{array}{llll}
=0, \quad C_1 = 0, & C_2 = 0, \ldots, & C_{n-1} = 0, & C_n = 0, \\
A_1 = U + \lambda_1 C_1 = 0, & A_2 = U + \lambda_2 C_2 = 0, \ldots, & A_{n-1} = U + \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0, & A_n = U + \lambda_n C_n = 0, \\
\Sigma_{1,2} = \lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 = 0, & \Sigma_{1,3} = \lambda_1 C_1 - \lambda_3 C_3 = 0, \ldots, & \Sigma_{1,n-1} = \lambda_1 C_1 - \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0, & \Sigma_{1,n} = \lambda_1 C_1 - \lambda_n C_n = 0, \\
 & \Sigma_{2,3} = \lambda_2 C_2 - \lambda_3 C_3 = 0, \ldots, & \Sigma_{2,n-1} = \lambda_2 C_2 - \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0, & \Sigma_{2,n} = \lambda_2 C_2 - \lambda_n C_n = 0. \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & \Sigma_{n-2,n-1} = \lambda_{n-2} C_{n-2} - \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0, & \Sigma_{n-2,n} = \lambda_{n-2} C_{n-2} - \lambda_n C_n = 0, \\
 & & & \Sigma_{n-1,n} = \lambda_{n-1} C_{n-1} - \lambda_n C_n = 0.
\end{array}
$$

On voit aisément que les coniques A et C et la conique U jouent elles-mêmes le rôle de coniques Σ, et qu'en somme chacune des coniques mises en présence passe par les points d'intersection de n couples de ces coniques.

Ce théorème donne naturellement lieu à un théorème corrélatif, à des corollaires, à des applications aux coniques sphériques, etc.; mais on comprend facilement que je m'abstienne de les développer ici.

NOUVELLE DÉTERMINATION SYNTHÉTIQUE

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE;

PAR M. P. SAINT-GUILHEM,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Définitions.

1. Fixons le sens de quelques termes dont nous ferons usage et sur le choix desquels les savants ne sont pas tous d'accord.

Lorsqu'un point matériel soumis à des forces et à des liaisons quelconques est en mouvement, il peut toujours être considéré comme libre et soumis à une force unique appelée la *force totale*. La résultante des forces qui sollicitent le point matériel, indépendamment des liaisons, se nomme la force *motrice*.

Si l'on décompose la force totale en deux, l'une suivant la tangente à la trajectoire, l'autre suivant la normale, la première est la force *tangentielle*, la seconde la force *infléchissante* ou *centripète*.

On appelle *quantité de mouvement* d'un point matériel une force fictive appliquée à ce point suivant la direction de la vitesse et qui a pour mesure le produit de la masse du point matériel par sa vitesse.

Si, après avoir élevé par le centre des moments une perpendiculaire au plan du moment d'une force dans un sens déterminé, on prend sur cette perpendiculaire, à partir du centre des moments, une longueur égale à la valeur numérique du moment de la force, on aura, en grandeur et en direction, *l'axe du moment de la force*.

Nous supposerons toujours que la direction de la perpendiculaire est telle qu'un spectateur, qui aurait les pieds sur le plan du moment et le dos appuyé contre la perpendiculaire, verrait la force que l'on considère dirigée de sa droite à sa gauche.

L'axe du moment d'une droite sera l'axe du moment de la force représentée par cette droite.

Trois axes ox, oy, oz seront trois *axes tournants* lorsqu'ils seront tels qu'un spectateur qui aurait les pieds au point o et le dos appuyé successivement contre chacun des axes ox, oy, oz verrait successivement l'axe oy à la droite de l'axe oz, celui-ci à la droite de l'axe ox, et ce dernier à la droite de l'axe oy.

Cela posé, soient :

o	le point fixe autour duquel on suppose qu'un corps solide donné est assujetti à tourner;
ox, oy, oz	trois axes rectangulaires tournants fixes dans le corps;
x, y, z	les trois coordonnées, par rapport à ces axes, d'un point m du corps, dont la masse est m;
u, v, w	les vitesses, au bout du temps t, du même point suivant les mêmes axes;
ox_1, oy_1, oz_1	trois axes rectangulaires tournants fixes dans l'espace;
x_1, y_1, z_1	les coordonnées du point m, au bout du temps t, par rapport à ces axes;
u_1, v_1, w_1	les vitesses du même point suivant les mêmes axes;
Ω	l'axe du moment de la vitesse, au bout du temps t, d'un point du corps situé à l'unité de distance du point fixe et de l'axe instantané;
p, q, r	les projections de la droite Ω sur les axes ox, oy, oz;
G	l'axe du moment résultant des quantités de mouvement des divers points du corps;
L, M, N	les projections de la droite G sur les axes ox, oy, oz;
L_1, M_1, N_1	les projections de la droite G sur les axes ox_1, oy_1, oz_1;
F	l'axe du moment résultant des forces infléchissantes.

A l'aide de ces conventions, nous établirons sans difficulté les principes suivants.

I.

2. *L'axe du moment résultant* [*] *des forces totales coïncide, à*

[*] M. Poinsot dirait : *l'axe du couple résultant;* M. Poisson, *l'axe du moment principal;* M. Cauchy, *le moment linéaire résultant.*

chaque instant, en grandeur et en direction avec la vitesse absolue de l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

En effet, on a

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = v_1, \quad \frac{dz_1}{dt} = w_1.$$

On a d'ailleurs, par une formule connue de statique [*],

$$L_1 = \Sigma m(y_1 w_1 - z_1 v_1),$$

Σ indiquant une sommation étendue à tous les points du corps.

On déduit de là

$$(1) \qquad \frac{dL_1}{dt} = \Sigma m\left(y_1 \frac{dw_1}{dt} - z_1 \frac{dv_1}{dt}\right).$$

On trouverait pour $\frac{dM_1}{dt}$, $\frac{dN_1}{dt}$ deux formules analogues.

Or L_1, M_1, N_1 étant les coordonnées de l'extrémité de la droite G, $\frac{dL_1}{dt}$, $\frac{dM_1}{dt}$, $\frac{dN_1}{dt}$ sont les vitesses de l'extrémité de cette droite parallèles aux axes ox_1, oy_1, oz_1.

D'un autre côté, les valeurs de ces mêmes quantités sont, en vertu de la formule (1), les projections de l'axe du moment résultant des forces totales sur les mêmes axes coordonnés. Donc, etc.

II.

L'axe du moment résultant des forces infléchissantes coïncide, à chaque instant, en grandeur et en direction avec la vitesse du point du corps situé à l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

En effet, soient :

φ et γ la force infléchissante et la quantité de mouvement du point m, au bout du temps t;

f et g les axes des moments de ces forces;

F et G les axes des moments résultants des forces φ et des forces γ, c'est-à-dire des forces infléchissantes et des quantités de mouvement;

ρ_0, ρ les distances du point m au point fixe et à l'axe instantané;

h_0 la projection de ρ_0 sur l'axe instantané.

[*] *Voir* le tome XVI de ce Journal, page 351.

On aura les relations suivantes :

$$\varphi = m\Omega^2\rho, \quad \gamma = m\Omega\rho, \quad f = m\Omega^2\rho . h_0, \quad g = m\Omega\rho . \rho_0.$$

On déduit de là

$$f = g \cdot \frac{h_0}{\rho_0}\Omega.$$

Si l'on appelle g' la projection de l'axe g sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané, on aura

$$g' = g \cdot \frac{h_0}{\rho_0},$$

et, par suite,

$$f = g' . \Omega;$$

donc la force f est proportionnelle à g'. Il y a plus : si l'on fait coïncider l'axe oz avec la droite Ω, et qu'on prenne l'axe des x de manière que le point m soit dans l'angle zox ou $z'ox$, oz' étant le prolongement de oz, on voit sans peine que l'axe f coïncide avec la direction négative ou positive de l'axe des y, suivant que le point m est dans l'angle zox ou dans l'angle $z'ox$; que la projection de l'axe g sur le plan des xy coïncide dans les mêmes hypothèses avec la direction négative ou positive de l'axe des x; donc, si l'on fait tourner l'axe f autour du point fixe d'un quart de révolution dans le plan des xy, en sens contraire de la rotation du corps, il coïncidera en direction avec g'; ainsi tous les axes f sont proportionnels aux droites g' et sont en avant de celles-ci de 90 degrés sur le plan des xy; donc l'axe du moment résultant des forces infléchissantes se trouve lui-même sur le plan des xy en avant de la projection de la droite G d'un angle de 90 degrés, et l'on a la relation

$$F = G'\Omega,$$

G' étant la projection de la droite G sur le plan des xy.

De là on conclut, G' mesurant la distance de l'extrémité de la droite G à l'axe instantané, que F est égal et parallèle à la vitesse de l'extrémité de la droite G, ce point étant considéré comme un point du corps. C. Q. F. D.

III.

L'axe du moment résultant des forces tangentielles est, à chaque instant, représenté en grandeur et en direction par la vitesse de l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement dans l'intérieur du corps.

En effet, d'une part, la vitesse absolue de l'extrémité de la droite G est la résultante de la vitesse de ce point considéré comme appartenant au corps et de la vitesse de ce point dans l'intérieur du corps; d'autre part, l'axe du moment résultant des forces totales est la résultante de l'axe du moment résultant des forces infléchissantes et de l'axe du moment résultant des forces tangentielles: donc, en vertu des deux principes précédents, l'axe du moment résultant des forces tangentielles est représenté en grandeur et en direction, etc.

Traduction en nombres des principes II *et* III.

5. Les principes II et III se traduisent en nombres à l'aide des formules auxquelles donnent lieu les trois problèmes suivants :

I. *Déterminer l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.*

Appliquons au point m une droite Ω' égale, parallèle et contraire à la droite Ω; l'axe du moment de cette droite sera visiblement égal et parallèle à la vitesse du point m; or les projections de la droite Ω' sur les axes ox, oy, oz étant $-p$, $-q$, $-r$, l'axe du moment de la droite Ω' aura pour projections sur les mêmes axes les quantités $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$; par conséquent, l'axe du moment de la quantité de mouvement du point m aura lui-même pour projections sur les mêmes axes,

$$m[(py - qx)y - (rx - pz)z],$$
$$m[(qz - ry)z - (py - qx)x],$$
$$m[(rx - pz)x - (qz - ry)y];$$

par suite, si nous posons, comme à l'ordinaire,

$$\Sigma m(y^2 + z^2) = A, \quad \Sigma m(z^2 + x^2) = B, \quad \Sigma m(x^2 + y^2) = C,$$
$$\Sigma myz = D, \quad \Sigma mzx = E, \quad \Sigma mxy = F.$$

Σ indiquant une sommation relative à tous les points du corps, on aura

$$(2)\quad L = Ap - Fq - Er, \quad M = Bq - Dr - Fp, \quad N = Cr - Ep - Dq.$$

Ce sont les trois projections de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement sur les axes ox, oy, oz.

II. *Déterminer l'axe du moment résultant des forces tangentielles.*

Cet axe a évidemment pour projections sur les axes ox, oy, oz les quantités

$$\frac{dL}{dt}, \quad \frac{dM}{dt}, \quad \frac{dN}{dt},$$

qu'on déduit des formules (2) en les différentiant par rapport à t.

En effet, cet axe coïncide en grandeur et en direction avec la vitesse de l'extrémité de la droite G par rapport aux axes ox, oy, oz: or

$$\frac{dL}{dt}, \quad \frac{dM}{dt}, \quad \frac{dN}{dt}$$

expriment précisément les projections de cette vitesse sur les mêmes axes, puisque L, M, N sont les coordonnées par rapport aux mêmes axes du point dont il s'agit; donc, etc.

III. *Déterminer l'axe du moment résultant des forces infléchissantes.*

D'après le principe II de l'article 2, il suffit de trouver la vitesse de l'extrémité de la droite G considérée comme un point du corps; or, si l'on applique au point dont il s'agit une droite Ω' égale, parallèle et contraire à la droite Ω, nous avons déjà vu que l'axe du moment de cette droite sera égal et parallèle à la vitesse de l'extrémité de la droite G, considérée comme un point du corps; mais la droite Ω' a pour projections sur les axes ox, oy, oz les quantités $-p$, $-q$, $-r$; l'extrémité de la droite G a pour coordonnées par rapport aux mêmes axes L, M, N; donc l'axe du moment de la droite Ω' ou du moment résultant des forces infléchissantes a pour projections sur les axes ox, oy, oz les trois quantités $Nq - Mr$, $Lr - Np$, $Mp - Lq$.

Équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

4. Le principe de d'Alembert appliqué au mouvement dont il s'agit peut se traduire ainsi : L'axe du moment résultant des forces totales coïncide en grandeur et en direction avec l'axe du moment résultant des forces motrices.

D'après ce principe, si nous appelons P, Q, R les projections de l'axe du moment résultant des forces motrices sur les axes ox, oy, oz, on aura immédiatement

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{dL}{dt} + Nq - Mr, \\ Q &= \frac{dM}{dt} + Lr - Np, \\ R &= \frac{dN}{dt} + Mp - Lq. \end{aligned}\right.$$

Ces équations, jointes aux équations (2), déterminent complètement les vitesses angulaires du corps à une époque quelconque autour des trois axes ox, oy, oz.

Il reste à trouver la position des axes mobiles ox, oy, oz par rapport aux axes fixes ox_1, oy_1, oz_1. A cet effet, remarquons que le corps tournant autour de l'axe instantané avec une vitesse égale à Ω pendant l'instant dt occupe à la fin de cet instant par rapport à l'un quelconque des axes fixes ox_1, oy_1, oz_1 la même position que si le corps était resté fixe et que l'axe considéré eût tourné autour de l'axe instantané avec une vitesse de rotation égale et contraire à celle qu'avait le corps.

Donc, si l'on prend sur l'un des axes ox_1, oy_1, oz_1 un point quelconque m' et qu'on applique à ce point une droite égale et parallèle à la droite Ω, l'axe du moment de cette droite sera égal et parallèle à la vitesse du point m', donc, si l'on appelle x', y', z' les coordonnées du point m' par rapport aux axes ox, oy, oz, on aura, en observant que la droite attachée au point m' a pour projections sur les axes ox,

oy, oz les quantités p, q, r,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = ry' - qz', \\ \dfrac{dy'}{dt} = pz' - rx', \\ \dfrac{dz'}{dt} = qx' - py'. \end{cases}$$

Au moyen de ces relations, on aura la position de chacun des axes ox_1, oy_1, oz_1 par rapport aux axes ox, oy, oz, et, par conséquent, la position de chacun de ceux-ci par rapport aux trois axes fixes dans l'espace.

Les équations (4), jointes aux équations (2) et (3), résolvent complètement le probleme dont il s'agit; les équations (4) ne sont pas celles qu'on donne ordinairement, mais elles peuvent très-bien les remplacer. Nous avons d'ailleurs donné dans le tome Ier de ce Journal, page 315, une démonstration sans calcul des formules usitées.

La démonstration des équations d'Euler que nous avions donnée dans notre *Nouvelle etude sur la théorie des forces*, insérée au tome XVI de ce Journal, présentait quelque obscurité : complétée maintenant par les développements qui précèdent, nous pensons qu'elle ne laisse plus rien à désirer.

En cherchant la solution qui fait l'objet de ce Mémoire, nous avons trouvé une démonstration analytique des formules (3) qui nous paraît remarquable par sa grande simplicité. Nous allons l'indiquer.

Solution analytique.

Soient a, b, c les cosinus des angles que l'axe ox_1 fait avec les axes ox, oy, oz.

L, M, N étant les coordonnées de l'extrémité de l'axe G par rapport aux axes ox, oy, oz; L_1, M_1, N_1 étant les coordonnées du même point par rapport aux axes ox_1 oy_1 oz_1, on aura, comme on sait,

$$L_1 = aL + bM + cN.$$

Différentiant cette équation par rapport à t, il vient

$$\frac{dL_1}{dt} = a\frac{dL}{dt} + b\frac{dM}{dt} + c\frac{dN}{dt}$$
$$+ L\frac{da}{dt} + M\frac{db}{dt} + N\frac{dc}{dt}:$$

les valeurs de

$$\frac{da}{dt},\quad \frac{db}{dt},\quad \frac{dc}{dt}$$

sont évidemment données par les équations (4) qu'on trouve directement, en faisant dans celles-ci

$$x' = a,\quad y' = b,\quad z' = c;$$

d'où il résulte que si l'on fait coïncider l'axe ox_1 avec l'axe ox, on aura

$$a = 1,\quad b = 0,\quad c = 0,$$
$$\frac{da}{dt} = 0,\quad \frac{db}{dt} = -r,\quad \frac{dc}{dt} = q;$$

donc, dans cette hypothèse,

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{dL}{dt} + Nq - Mr.$$

Or, si l'on forme la valeur de L_1, et qu'on la différentie par rapport à t, on verra, comme à l'art. 2, que $\frac{dL_1}{dt}$ n'est autre chose que la projection de l'axe du moment résultant des forces totales sur l'axe ox_1 et par conséquent, dans l'hypothèse actuelle, sur l'axe ox; donc, en désignant par P cette projection, on aura

$$P = \frac{dL}{dt} + Nq - Mr.$$

On trouverait de même les deux autres.

Post-Scriptum. La solution synthétique qui fait l'objet du Mémoire précédent, peut être notablement simplifiée en observant que l'introduction des forces tangentielles et infléchissantes n'est pas né-

cessaire pour obtenir les équations d'Euler : il suffit, en effet, pour parvenir à ces équations, d'exprimer, d'après le principe de d'Alembert, que l'axe du moment résultant des forces motrices coïncide en grandeur et en direction avec l'axe du moment résultant des forces totales, et, pour cela, de remarquer, 1° que l'axe du moment résultant des forces totales est représenté en grandeur et en direction par la vitesse absolue de l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement ; 2° que cette vitesse est la résultante de la vitesse du même point dans l'intérieur du corps et de la vitesse de ce point considéré comme un point du corps. Nous avons montré, dans notre Mémoire, comment on peut obtenir directement ces trois vitesses : donc on peut obtenir directement et d'une manière très-simple les équations dont il s'agit.

CONSTRUCTION DE LA COURBE DU TROISIÈME ORDRE

DÉTERMINÉE PAR NEUF POINTS;

PAR M. CHASLES.

Il s'agit de trouver un mode de génération des courbes du troisième ordre, qui permette d'assujettir la courbe à passer par neuf points donnés. Le théorème suivant satisfait à la question.

THÉORÈME. *Qu'on ait une série de sections coniques inscrites dans un quadrilatère, et deux divisions homographiques* (α), (α') *sur une même droite* D; *que par un point fixe* S, *pris sur un des côtés du quadrilatère, on mène une tangente à chaque conique, laquelle va rencontrer la droite* D *en un point* α *de la première division; et que par le point homologue* α' *de la seconde division, on mène les deux tangentes à la même conique; le lieu des points d'intersection de la première tangente par ces deux-ci est une courbe du troisième ordre, qui passe par le point fixe* S *et par les trois sommets du triangle formé par les trois côtés du quadrilatère, autres que celui sur lequel est pris le point* S.

Pour appliquer ce mode de génération des courbes du troisième ordre à la construction de la courbe qui doit passer par neuf points, soient S, A, B, C, a, b, c, d, e ces neuf points. Que par le premier S on mène, arbitrairement, une droite qui formera avec les trois côtés du triangle ABC un quadrilatère, et que du même point S on mene aux cinq points a, b, c, d, e les cinq droites Sa, Sb, etc.; puis, qu'on conçoive les cinq coniques inscrites dans le quadrilatère et tangentes, une à une respectivement, à ces cinq droites, et que, par les points a, b, c, d, e on mene les cinq autres tangentes à ces courbes, une à une respectivement; et enfin, que l'on détermine la droite D qui rencontre ces cinq tangentes en cinq points α', β', γ', δ', ε' correspondant *anharmoniquement* aux cinq rayons issus du point S, Sa, Sb, Sc, Sd,

Sc; c'est-à-dire que les rapports anharmoniques des cinq points α', β', etc., pris quatre à quatre, doivent être égaux à ceux des rayons Sa, Sb, etc. Cette droite D, facile à construire, existe toujours et n'a qu'une position. Soient α, β, γ, δ, ε les points dans lesquels les cinq rayons Sa, Sb,... la rencontrent. Ces points et les premiers α', β'.... forment deux divisions homographiques. Il suffit maintenant de se servir de ces deux divisions, comme dans le théorème énoncé, pour construire la courbe; c'est-à-dire qu'on prendra deux points homologues des deux divisions, φ et φ', et qu'après avoir déterminé la conique inscrite dans le quadrilatère et tangente au rayon Sφ, on menera par le point φ' les deux tangentes à cette courbe, lesquelles rencontreront le rayon Sφ en deux points appartenant à la courbe demandée.

Il faut remarquer qu'il n'est pas nécessaire de construire effectivement les coniques dont il est question, parce qu'on sait déterminer directement, par la ligne droite et le cercle, les deux tangentes menées par un point donné à la conique qui doit toucher cinq droites données.

Cette solution du problème de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points est différente des deux que j'ai déjà données (voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* séances des 30 mai et 16 août 1853), dans lesquelles on se servait de faisceaux de coniques passant par quatre points. Je ferai connaître dans un autre moment diverses autres solutions de la même question, dont plusieurs dérivent de considérations qui ont l'avantage de conduire aussi à des solutions variées d'une autre question importante, savoir, la construction de la surface du second ordre qui passe par neuf points.

Expression simple du rayon de courbure géodésique d'une ligne tracée sur un ellipsoïde;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Dans un article inséré au tome XVI de ce Journal, page 130, j'ai donné une formule générale pour exprimer le rayon de courbure géodésique d'une ligne tracée sur une surface quelconque; mais voici pour le cas où la surface est un ellipsoïde une formule spéciale qui pourra être quelquefois utile.

Soient MM′ la ligne proposée, MT sa tangente en M, et MS la tangente conjuguée suivant la définition de M. Ch. Dupin. Désignons par θ l'angle SMT, et par H la perpendiculaire abaissée de l'extrémité E du demi-diamètre OE, mené par le centre O de l'ellipsoïde parallèlement à MS, sur le diamètre parallèle à MT. Enfin, soient ds l'élément de la courbe, et ρ le rayon de courbure géodésique. On aura

$$\frac{1}{\rho} = \operatorname{tang}\theta \frac{d\log \mathrm{H}}{ds}.$$

Je n'ai pas à ajouter la démonstration : elle se trouve implicitement au tome XI de ce Journal, page 23; la conclusion seule manquait, ou du moins il suffit de faire observer que dans la formule

$$\frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{H}} = \operatorname{cotang}\theta\, d\varepsilon,$$

qu'on voit à la page citée, la signification de la quantité $d\varepsilon$ est telle que $d\varepsilon = \frac{ds}{\rho}$.

SUR

LA QUADRATURE DÉFINIE DES SURFACES COURBES;

PAR M. C.-W. BORCHARDT (DE BERLIN).

1. Le Mémoire suivant se rapporte à la quadrature des surfaces courbes. Il traite spécialement des problèmes de ce genre que l'on désigne sous le nom de *quadrature définie*, et où il s'agit d'évaluer des aires entières de surfaces fermées, ou, plus généralement, des aires de certaines portions de surface dont les limites sont intimement liées à la nature même de la surface. Le caractère qui distingue la méthode dont je me servirai consiste en ce qu'elle donne l'aire cherchée sous forme d'une intégrale triple, qui, pour l'évaluation de l'aire entière d'une surface fermée, se rapporte à tous les éléments de volume contenus dans cette surface; tandis que la méthode ordinaire la donne sous forme d'une intégrale double, qui se rapporte à tous les éléments d'une surface plane (projection de la surface courbe sur un plan).

Cette différence de forme permet surtout de conserver dans les problèmes où les trois coordonnées jouent le même rôle, la symétrie des calculs, avantage que n'offre pas la méthode ordinaire, laquelle, au contraire, oblige de donner à deux des trois coordonnées la préférence sur la troisième, ou d'avoir recours à de nouvelles variables dont le choix reste pourtant très-arbitraire dans la classe de problèmes qui m'occupe.

J'exposerai deux routes différentes pour arriver à l'expression de l'aire en intégrale triple. Dans la première, je m'appuie sur une propriété des surfaces parallèles. On sait que le volume compris entre deux surfaces parallèles se réduit au produit de l'aire de l'une des deux surfaces par leur distance, lorsque cette dernière devient infiniment petite. L'inversion de ce résultat montre que l'aire d'une surface peut

être considérée comme la limite vers laquelle converge le rapport, dont le numérateur est le volume compris entre la surface et sa parallèle, et le dénominateur la distance des deux surfaces. Le numérateur de ce rapport pouvant être exprimé, comme tous les volumes, sous forme d'une intégrale triple, on est conduit à une expression semblable pour la limite du rapport en question, c'est-à-dire pour l'aire de la surface. Cette première route a plusieurs points de commun avec les belles recherches sur les surfaces parallèles, que M. Steiner a communiquées à l'Académie de Berlin (Voir *Monatsberichte der Berliner Akademie*, année 1840, page 114).

La seconde route repose sur des considérations précisément inverses de celles par lesquelles M. Gauss, dans son célèbre Mémoire : *Theoria attractionis corporum sphæroïdicorum* (Commentat. Gotting. tome II), réduit plusieurs intégrations triples, telles que la détermination du volume d'un corps, à des intégrations doubles qui se rapportent à tous les éléments superficiels de ce corps. Par cette voie, on arrive à une formule très-générale qui embrasse toutes les intégrales doubles prises par rapport aux éléments superficiels d'une surface fermée.

J'applique ensuite les expressions en intégrales triples à l'évaluation de l'aire entière de l'ellipsoïde et à la détermination d'une autre intégrale qui s'étend aussi à toute la surface de l'ellipsoïde, et dans laquelle l'élément superficiel est multiplié par la somme des valeurs réciproques des rayons de courbure principale. De cette application, il résulte que ces deux intégrales dépendent du potentiel de l'ellipsoïde aux demi-axes réciproques par rapport au centre (l'attraction étant supposée proportionnelle à la puissance -2 ou -3 de la distance), et qu'elles se déduisent de ce potentiel par des différentiations partielles prises relativement aux axes.

2. Je commence par rappeler une proposition, qui, dans son énoncé analytique, coïncide avec la formule générale dont on se sert pour la transformation des variables dans les intégrales triples, et qui en diffère seulement par la signification géométrique qu'on lui attribue.

« Soient

$$X = \varphi_1(x, y, z), \quad Y = \varphi_2(x, y, z), \quad Z = \varphi_3(x, y, z),$$

» trois équations qui font dépendre X, Y, Z de x, y, z. Considérons » x, y, z et X, Y, Z comme les coordonnées rectangulaires de deux » points variables p et P, et nommons le point P le correspondant » de p. Soient dm un élément de volume infiniment petit, et dM l'élé- » ment de volume correspondant, c'est-à-dire l'élément tel qu'un » point p trouve son correspondant P dans dM ou ne le trouve pas, » suivant qu'il fait partie de dm ou qu'il n'en fait pas partie. Cela » posé, le rapport des deux éléments correspondants de volume dm » et dM est donné par l'équation

$$\frac{d\mathrm{M}}{dm} = \sum \left(\pm \frac{d\mathrm{X}}{dx} \frac{d\mathrm{Y}}{dy} \frac{d\mathrm{Z}}{dz} \right),$$

» cette notation désignant le déterminant différentiel de X, Y, Z par » rapport à x, y, z, c'est-à-dire le déterminant des neuf quantités :

$$\begin{matrix} \frac{d\mathrm{X}}{dx}, & \frac{d\mathrm{X}}{dy}, & \frac{d\mathrm{X}}{dz}, \\ \frac{d\mathrm{Y}}{dx}, & \frac{d\mathrm{Y}}{dy}, & \frac{d\mathrm{Y}}{dz}, \\ \frac{d\mathrm{Z}}{dx}, & \frac{d\mathrm{Z}}{dy}, & \frac{d\mathrm{Z}}{dz}. \end{matrix} \text{ »}$$

A l'aide de cette proposition, il est aisé d'établir une formule dont j'aurai besoin dans la suite, et qui exprime le rapport de l'élément superficiel ds d'une surface donnée et de l'élément superficiel correspondant dS de sa surface parallèle. J'entends ici par *points correspondants* de deux surfaces parallèles, deux points déterminés par l'intersection de ces surfaces avec une quelconque de leurs normales communes. Deux *éléments superficiels* de ces deux surfaces seront donc *correspondants* lorsqu'un point quelconque de l'un des deux éléments trouve son correspondant sur l'autre, et *vice versâ*. Pour le rapport entre deux éléments superficiels dont la correspondance est ainsi définie, on connaît déjà l'expression

$$(a) \qquad ds : d\mathrm{S} = \rho\rho' : (\rho + \lambda)(\rho' + \lambda),$$

où λ désigne la distance entre les deux surfaces parallèles, et ρ, ρ' les rayons de courbure principaux en un point de l'élément superficiel ds de l'une des deux surfaces, ces rayons étant pris avec le signe

— ou +, suivant qu'ils sont dirigés vers l'élement correspondant dS de l'autre surface ou dans le sens opposé. Mais il s'agit ici d'une autre formule pour le même rapport.

Soit c un paramètre variable qui peut obtenir toutes les valeurs comprises entre les deux limites infiniment peu différentes c_0 et c_1, c_1 étant supposé $> c_0$; soient (f_0), (f), (f_1) les surfaces déterminées par les équations

$$(f_0) \qquad f(x, y, z) = c_0,$$

$$(f) \qquad f(x, y, z) = c,$$

$$(f_1) \qquad f(x, y, z) = c_1.$$

surfaces dont la seconde, en changeant de forme par la variation de c, reste, en général, comprise entre la première et la troisième; soient (F_0), (F), (F_1) les surfaces respectivement parallèles à (f_0), (f), (f_1) à la distance λ et situées du côté où $f(x, y, z)$ croît.

Soient :

ds_0 un élément superficiel de (f_0);

(ψ) la surface lieu des normales menées à (f_0) le long du contour de ds_0;

ds, ds_1 les éléments superficiels formés sur (f), (f_1) par l'intersection avec (ψ);

dS_0, dS, dS_1 les éléments superficiels situés sur (F_0), (F), (F_1) et correspondants de ds_0, ds, ds_1;

(Ψ) la surface lieu du contour de l'élément variable dS;

dm_0, dm_1, dm les éléments de volume renfermés respectivement entre ds_0, ds, (ψ); ds_1, ds, (ψ); ds_0, ds_1, (ψ);

dM_0, dM_1, dM les éléments de volumes correspondants de dm_0, dm_1, dm, c'est-à-dire renfermés respectivement entre dS_0, dS, (Ψ); dS_1, dS, (Ψ); dS_0, dS_1, (Ψ);

de sorte que

$$dm_0 + dm_1 = dm, \quad dM_0 + dM_1 = dM.$$

Cela posé, on a, d'une part,

$$(b) \qquad dm : dM = ds : dS.$$

En effet, chacun des deux couples d'éléments superficiels ds_0 et dS_0, ds et dS comprend deux éléments parallèles entre eux à la distance δ; donc, en considérant ds, dS comme les bases des éléments de volume dm_0, dM_0, les hauteurs de ces derniers sont égales : d'où il suit que les volumes sont entre eux comme les bases, c'est-à-dire que

$$dm_0 : dM_0 = ds : dS.$$

La même proportion a lieu pour

$$dm_1 : dM_1;$$

donc aussi pour

$$dm_0 + dm_1 : dM_0 + dM_1,$$

ou, ce qui est la même chose, pour

$$dm : dM. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'autre part, à chaque point p faisant partie de l'élément de volume dm et situé sur la surface (f), correspond un point P faisant partie de l'élément de volume dM et situé sur la surface (F).

Soient x, y, z les coordonnées du point p situé sur la surface (f), de sorte que x, y, z satisfont à l'équation

$$f(x, y, z) = c;$$

soit N la normale menée à (f) en p, et dirigée vers la région de l'espace où

$$f(x, y, z) > c;$$

soient, enfin, ξ, η, ζ les angles que N forme avec les côtés positifs des axes des coordonnées, de sorte que

$$\cos\xi = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}, \quad \cos\eta = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}, \quad \cos\zeta = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz},$$

où

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

et où $\sqrt{R}$ doit être prise avec le signe positif; cela posé, les coordonnées X, Y, Z du point P qui correspond à p se déterminent en fonction de x, y, z à l'aide des conditions que P soit situé sur N et à

la distance λ de p, ce qui donne les équations :

$$(1)\quad \begin{cases} X = x + \lambda\cos\xi = x + \dfrac{\lambda}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}, \\ Y = y + \lambda\cos\eta = y + \dfrac{\lambda}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}, \\ Z = z + \lambda\cos\zeta = z + \dfrac{\lambda}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}. \end{cases}$$

Et comme ces formules lient les coordonnées x, y, z d'un point quelconque p de l'élément de volume dm aux coordonnées X, Y, Z d'un point correspondant P de l'élément de volume dM, et *vice versâ*, on aura, d'après la proposition énoncée au commencement de ce numéro et d'après les proportions (a), (b),

$$(2)\quad \frac{dM}{dm} = \frac{dS}{ds} = \left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\rho'}\right) = \sum\left(\pm\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dz}\right).$$

Ce résultat fournit le lemme suivant :

Lemme. — « L'élément superficiel d'une surface donnée se trouve » à l'élément correspondant de sa surface parallèle, dans le rapport » de 1 : L, L étant défini par l'équation

$$(2\ bis)\quad L = \left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\rho'}\right) = \sum\left(\pm\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dz}\right) = 1 + G\lambda + H\lambda^2,$$

» où

$$(3)\quad \begin{cases} G = \dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{\rho'} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}\right) + \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}\right), \\ H = \dfrac{1}{\rho\rho'} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}\right)\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}\right) + \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}\right)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}\right) \\ \qquad + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}\right)\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}\right) - \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}\right)\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}\right) \\ \qquad - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}\right)\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}\right) - \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}\right)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}\right), \end{cases}$$

$$(4)\quad R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2.$$

» Dans ces formules,

$$f(x, y, z) = \text{constante}$$

» est l'équation de la surface donnée (f), λ la distance de (f) à sa sur-
» face parallèle; ρ, ρ' sont les rayons de courbure principaux de (f) et
» X, Y, Z sont définis en fonction de x, y, z par les équations (1). »

Dans le développement de L suivant les puissances de λ, le coefficient de λ^3 disparaît d'après un théorème connu, car il est le déterminant différentiel des trois quantités $\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}$, $\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}$, $\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}$, qui, ayant la somme de leurs carrés égale à 1, ne sont pas indépendantes entre elles.

Changeons λ en $-\lambda$, et nommons Λ ce que devient L après ce changement; alors

$$\Lambda = \left(1 - \frac{\lambda}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\rho'}\right)$$

s'évanouit pour $\lambda = \rho$ et $\lambda = \rho'$, d'où l'on tire le corollaire suivant :

Corollaire. — « Soit

$$X' = x - \frac{\lambda}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx},$$

$$Y' = y - \frac{\lambda}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy},$$

$$Z' = z - \frac{\lambda}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz},$$

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2:$$

» regardons λ comme indépendant de x, y, z, et formons le déterminant différentiel

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dX'}{dx}, & \frac{dX'}{dy}, & \frac{dX'}{dz} \\ \frac{dY'}{dx}, & \frac{dY'}{dy}, & \frac{dY'}{dz} \\ \frac{dZ'}{dx}, & \frac{dZ'}{dy}, & \frac{dZ'}{dz} \end{vmatrix} = 1 - G\lambda + H\lambda^2;$$

» alors les deux racines de l'équation

$$\Delta = 1 - G\lambda + H\lambda^2 = 0,$$

» sont les deux rayons de courbure principaux ρ, ρ' de la surface dé-

» terminée par l'équation

$$f(x, y, z) = \text{constante},$$

» de sorte que

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = G, \quad \frac{1}{\rho\rho'} = H,$$

» G et H étant donnés par les équations (3). »

3. Considérons à présent le cas dans lequel l'équation

$$f(x, y, z) = c$$

représente une surface fermée (f) qui sépare un volume fini (μ), dans lequel

$$f(x, y, z) < c,$$

du reste de l'espace infini, dans lequel

$$f(x, y, z) > c.$$

Supposons que la surface (f) soit continue ou composée de parties continues, qu'elle soit de courbure continue (sans arêtes et sans pointes) et que sa surface parallèle (F) soit à une distance λ assez petite pour que (f) et (F) ne se coupent pas, et pour que deux surfaces (F), qui correspondent à deux valeurs infiniment peu différentes de c, ne se coupent pas non plus [*].

En conservant les signes du numéro précédent, soient :

dm l'élément de volume;

V_0 le volume entier compris entre (f_0) et sa parallèle (F_0);

V_1 le volume entier compris entre (f_1) et sa parallèle (F_1);

$m_{0,1}$ le volume entier compris entre (f_0) et (f_1);

$M_{0,1}$ le volume entier compris entre (F_0) et (F_1).

Cela posé, le volume entier compris entre (f_0) et (F_1) aura la double expression

$$V_0 + M_{0,1} = m_{0,1} + V_1,$$

[*] On suppose ici que $f(x, y, z)$ soit une fonction bien définie. Sous cette hypothèse, deux surfaces (f), qui correspondent à des valeurs infiniment peu différentes de c, ne se coupent pas, et la même propriété se maintient dans les surfaces (F), au moins pour les valeurs de λ situées au-dessous d'une certaine limite.

d'où

$$V_1 - V_0 = M_{0,1} - m_{0,1};$$

mais on a

$$m_{0,1} = \iiint\limits_{c_0 < f(x,y,z) < c_1} dm,$$

et, d'après les équations (2) et (2 *bis*),

$$M_{0,1} = \iiint\limits_{c_0 < f(x,y,z) < c_1} L\,dm,$$

où

$$L = 1 + G\lambda + H\lambda^2,$$

G et H étant déterminés par les équations (3). On a donc

$$(5) \qquad V_1 - V_0 = \iiint (L - 1)\,dm = \iiint\limits_{c_0 < f(x,y,z) < c_1} (G\lambda + H\lambda^2)\,dm.$$

Il est aisé de s'assurer que cette équation ne cessera pas d'être exacte, lorsque la différence $c_1 - c_0$, au lieu d'être infiniment petite, devient finie. Pour le prouver, on n'a qu'à ajouter un nombre indéfini d'équations semblables, qui se succèdent de manière à ce que, dans chaque équation, la limite inférieure de l'inégalité à laquelle $f(x, y, z)$ doit satisfaire, coïncide avec la limite supérieure de l'équation précédente. L'équation (5) permet donc de réduire la détermination du volume V_1 compris entre la surface (f_1), définie par l'équation

$$f(x, y, z) = c_1,$$

et sa surface parallèle (F_1), à la solution du même problème pour une autre valeur c_0 de c.

La fonction $f(x, y, z)$ étant $< c_1$ pour tous les points du volume renfermé dans la surface (f_1), elle y aura une valeur minimum (si nous excluons le cas dans lequel $f(x, y, z)$ peut être discontinue ou infinie pour des valeurs finies de x, y, z), et, ce minimum n'ayant lieu que pour des valeurs de x, y, z qui satisfont aux trois équations

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad \frac{df}{dz} = 0,$$

il n'y aura, en général, que des points isolés pour lesquels

$$f(x, y, z) = \text{minimum}.$$

Soient c_0 la valeur minimum de $f(x, y, z)$, et n le nombre des points isolés pour lesquels

$$f(x, y, z) = c_0;$$

alors la condition

$$c_0 < f(x, y, z) < c_1$$

se réduit simplement à

$$f(x, y, z) < c_1;$$

de plus, le volume V_0 se réduit au volume de n spheres au rayon λ, c'est-à-dire à $\frac{4}{3} n\pi\lambda^3$. Par conséquent, la formule (5) (en y omettant les indices de c_1 et de V_1) devient

$$V = \iiint\limits_{f(x, y, z) < c} (G\lambda + H\lambda^2)\, dm + \frac{3}{4} n\pi\lambda^3.$$

Divisant par λ et faisant décroître cette quantité jusqu'à zéro, la limite vers laquelle converge le rapport $\frac{V}{\lambda}$ est l'aire entière s de la surface fermée (f), d'où

$$s = \iiint\limits_{f(x, y, z) < c} G\, dm.$$

On a donc les deux théorèmes :

Théorème I. — *Soit f une fonction de x, y, z telle, que l'équation $f = c$ représente une surface fermée (f) qui sépare un volume fini (μ), dans lequel $f < c$, du reste de l'espace infini dans lequel $f > c$; cela posé, l'aire entière s de la surface fermée (f) est*

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} s &= \iiint G\, dm \\ &= \iiint \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right], \end{aligned} \right.$$

où les intégrales triples s'étendent à tous les éléments de volume dm

qui font partie du volume (μ), *ou, ce qui est la même chose, à toutes les valeurs de* x, y, z *propres à vérifier l'inégalité* $f < c$.

THÉORÈME II. — *En maintenant les hypothèses du théorème précédent, soit* n *le nombre des points isolés pour lesquels la fonction* f *a sa valeur minimum, soit* (F) *la surface parallèle à* (f) *à la distance* λ *et du côté où* $f > c$; *cela posé, le volume entier* V *compris entre* (f) *et* (F) *est*

$$V = s\lambda + s_1\lambda^2 + \frac{3}{4}n\pi\lambda^3, \tag{7}$$

s_1 *étant donné par l'équation*

$$\left\{\begin{aligned} s_1 &= \iiint H\,dm \\ &= \iiint \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) \\ &+ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right) \\ &- \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) \end{aligned}\right\} dm, \end{aligned}\right. \tag{7 bis}$$

où les variables x, y, z *doivent prendre toutes les valeurs propres à vérifier l'inégalité* $f < c$.

4. Je passe maintenant à la seconde manière d'établir les résultats obtenus ci-dessus. Au lieu de se borner à ces résultats spéciaux, on arrive, par les considérations suivantes, avec la même facilité, à une formule plus générale, qui transforme toute intégrale double

$$\iint \varphi(x, y, z)\,ds,$$

étendue aux éléments superficiels ds d'une surface fermée, en une intégrale triple.

Conservons les signes des numéros précédents.

Soient (f) la surface fermée définie par l'équation

$$f(x, y, z) = c;$$

(μ) le volume renfermé dans (f) et pour tous les points duquel on a

$$f(x, y, z) < c;$$

ds un élément superficiel de (f); p un point faisant partie de ds et ayant les coordonnées x, y, z; N la normale de (f) en p dirigée vers la région extérieure au volume (μ); ξ, η, ζ les angles formés par la normale N et les côtés positifs des axes des x, y, z.

Concevons, avec M. Gauss, une droite g parallèle à l'axe des x, qui perce le plan des y, z dans le point dont les coordonnées sont y, z.

Dans ce plan, soit

$$d\omega = dy\,dz$$

le rectangle élémentaire dont les quatre angles sont les points correspondants aux coordonnées y, z; $y + dy$, z; y, $z + dz$; $y + dy$, $z + dz$; et soit (C) le prisme infiniment mince dont $d\omega$ est la base et g l'une des arêtes. En parcourant la droite g depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, on trouve un nombre pair de points p', p'', p''', etc., correspondants aux valeurs x', x'', x''', etc., de x, dans lesquels cette droite rencontre la surface (f) : savoir, elle entre dans le volume (μ) en p', elle en sort en p'', elle y rentre entre en p''', etc. Soient ds', ds'', ds''', etc., les éléments superficiels de (f), desquels les points p', p'', p''', etc., font partie, et que le prisme (C) détermine sur la surface (f) en la coupant. Soient N′, N″, N‴, etc., les normales de (f) en p', p'', p''', etc., et soient ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'', ξ''', η''', ζ''', etc., ce que deviennent les angles ξ, η, ζ pour les normales N′, N″, N‴, etc. Cela posé, on a les équations

$$\cos\xi' \,.\, ds' = -\,d\omega,$$
$$\cos\xi'' \,.\, ds'' = +\,d\omega,$$
$$\cos\xi''' \,.\, ds''' = -\,d\omega,$$
$$\ldots\ldots$$

Soit $\varphi(x, y, z)$ une fonction quelconque de x, y, z; multiplions ces équations respectivement par

$$\varphi(x', y, z) \,.\, \cos\xi',$$
$$\varphi(x'', y, z) \,.\, \cos\xi'',$$
$$\varphi(x''', y, z) \,.\, \cos\xi''',$$
$$\ldots,$$

et faisons la somme des produits; alors il vient

$$\varphi(x', y, z).\cos\xi'^2 ds' + \varphi(x'', y, z).\cos\xi''^2 ds'' + \varphi(x''', y, z).\cos\xi'''^2 ds''' + \ldots$$
$$= d\omega\left[-\varphi(x', y, z).\cos\xi' + \varphi(x'', y, z).\cos\xi'' - \varphi(x''', y, z).\cos\xi''' + \ldots\right].$$

La série qui, dans le second membre de cette équation, se trouve multipliée par $d\omega$, peut être convertie en une intégrale. En effet, on a

$$\cos\xi = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx},$$

où

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

la racine de R devant être prise avec le signe positif. La différence

$$\varphi(x'', y, z).\cos\xi'' - \varphi(x', y, z).\cos\xi'$$

est donc égale à l'intégrale

$$\int_{x'}^{x''} \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dx,$$

et de même la série

$$-\varphi(x', y, z).\cos\xi' + \varphi(x'', y, z).\cos\xi'' - \varphi(x''', y, z).\cos\xi''' + \ldots$$

est égale à

$$\int_{x'}^{x''} \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dx + \int_{x'''}^{x^{IV}} \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dx + \ldots,$$

c'est-à-dire égale à l'intégrale

$$\int \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dx,$$

étendue à tous les éléments linéaires dx de la droite g, faisant partie du volume (μ). Cette intégrale, multipliée par $d\omega = dy\,dz$, c'est-à-dire par la base du prisme infiniment mince (C), est donc égale à l'intégrale triple

$$\iiint \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dx\,dy\,dz.$$

étendue à tous les éléments de volume $dx\,dy\,dz$ du prisme (C), faisant partie du volume (μ).

En variant le prisme (C), de sorte qu'il reste toujours parallèle à l'axe des x, et en sommant tous les résultats partiels, on arrive à ce résultat final, que l'intégrale double

$$\int\int \varphi(x, y, z) \cos \xi^2\, ds,$$

étendue à tous les éléments superficiels ds de la surface (f), est égale à l'intégrale triple

$$\int\int\int \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dx\,dy\,dz,$$

étendue à tous les éléments de volume $dx\,dy\,dz$ qui font partie du volume (μ).

Il y a deux égalités semblables qui se rapportent d'une manière analogue à l'axe des y et à l'axe des z. En désignant, comme dans les numéros précédents, par dm l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, on a donc les trois équations :

$$(8)\quad \begin{cases} \int\int \varphi(x, y, z) \cos \xi^2\, ds = \int\int\int \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dm, \\ \int\int \varphi(x, y, z) \cos \eta^2\, ds = \int\int\int \frac{d}{dy}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right] dm, \\ \int\int \varphi(x, y, z) \cos \zeta^2\, ds = \int\int\int \frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right] dm, \end{cases}$$

les intégrales doubles s'étendant à tous les éléments superficiels ds de la surface (f), et les intégrales triples à tous les éléments de volume dm qui font partie du volume (μ), c'est-à-dire à toutes les valeurs de x, y, z propres à vérifier l'inégalité

$$f(x, y, z) < c.$$

En faisant la somme des équations (8) et en remarquant que

$$\cos \xi^2 + \cos \eta^2 + \cos \zeta^2 = 1,$$

on arrive au théorème général suivant.

THÉORÈME III. — *Soit φ une fonction quelconque de x, y, z et f une*

fonction des mêmes variables, telle que $f = c$ représente une surface fermée (f) qui sépare un volume fini (μ), dans lequel $f > c$, du reste de l'espace infini dans lequel $f > c$; cela posé, l'intégrale double

$$\int\int \varphi\, ds,$$

étendue à tous les éléments superficiels de la surface (f), est transformée en une intégrale triple par la formule

$$(9)\quad \int\int \varphi\, ds = \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm$$

où

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

et où l'intégrale triple s'étend à tous les éléments de volume dm qui font partie du volume (μ), c'est-à-dire à toutes les valeurs de x, y, z propres à vérifier l'inégalité $f < c$.

Si dans ce théorème on pose

$$\varphi = 1,$$

on retrouve l'expression (6) pour l'aire s de la surface (f).

Si l'on pose

$$\varphi = L = \left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\rho'}\right) = 1 + G\lambda + H\lambda^2,$$

L, G, H étant définis par les équations (2 *bis*), (3); alors (d'après le lemme du n° 2) la seconde partie de l'équation (9) donne pour l'aire complète S de la surface (F) parallèle à (f) à la distance λ, une expression en intégrales triples, analogue à celle que l'équation (7) a fournie pour le volume V compris entre (f) et (F), tandis que ces mêmes quantités S et V ont été exprimées par M. Steiner en intégrales doubles.

Chacune des deux parties de l'équation (9) prend, par la substitution de L au lieu de φ, la forme

$$s + t\lambda + u\lambda^2,$$

on a donc

$$S = s + t\lambda + u\lambda^2,$$

$$s = \int\int ds$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

$$t = \int\int \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

$$u = \int\int \frac{1}{\rho\rho'} ds$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm.$$

De l'aire complète S de la surface (F) on passe au volume V par la formule suivante qu'il est aisé de démontrer,

$$V = \int_0^\lambda S\, d\lambda,$$

d'ou

$$V = s\lambda + \frac{1}{2}t\lambda^2 + \frac{1}{3}u\lambda^3.$$

En comparant ce résultat avec l'équation (7), on trouve

$$t = 2s_1 = \int\int \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds = 2\int\int\int H\, dm$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm.$$

$$u = 4n\pi = \int\int \frac{1}{\rho\rho'} ds$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm.$$

En y joignant l'équation (6), c'est-à-dire l'équation

$$s = \int\int ds = \int\int\int G\, dm$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm.$$

et en se rappelant que

$$G = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}, \quad H = \frac{1}{\rho\rho'},$$

on arrive aux égalités suivantes :

$$(10) \quad \begin{cases} \iint ds = \iiint \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) dm, \\ \frac{1}{2} \iint \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds = \iiint \frac{1}{\rho\rho'} dm, \\ \iint \frac{1}{\rho\rho'} ds = 4n\pi, \end{cases}$$

qui méritent d'être signalées, et que l'on peut regarder comme se rapportant à un système de surfaces de niveau. Dans les premiers membres de ces équations les rayons de courbure ρ, ρ' sont relatifs à une surface de niveau déterminée; dans les seconds membres, ils sont relatifs à tout le système, de sorte que, dans cette dernière acception, il existe, pour chaque point de l'espace, deux rayons de courbure principaux. Les intégrations doivent être étendues, comme dans ce qui précède, à tous les éléments superficiels ds de la surface (f) et à tous les éléments de volume dm renfermés dans la même surface.

L'équation

$$\iint \frac{1}{\rho\rho'} ds = 4n\pi$$

est l'expression analytique du théorème connu, que la courbure entière (*curvatura integra*) d'une surface fermée complete est égale à un nombre entier n de surfaces sphériques au rayon 1. Ce nombre n est donc égal au nombre de points isolés auxquels se réduit la surface fermée déterminée par l'équation

$$f = c$$

pour la valeur minimum de c.

Dans l'article cité plus haut M. Steiner a donné aux deux intégrales

$$\iint \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds \quad \text{et} \quad \iint \frac{1}{\rho\rho'} ds,$$

étendues à une portion quelconque de surface, des noms que je traduis un peu librement par ceux de *courbure cylindrique* et de *cour-*

bure sphérique, de sorte que notre courbure sphérique est identique à la courbure entière (*curvatura integra*) de M. Gauss [*]. Les intégrales $t = 2s_1$ et $u = 4n\pi$ sont donc les courbures cylindrique et sphérique complètes d'une surface fermée.

En substituant dans l'expression obtenue de S la valeur de u, on arrive au théorème suivant :

THEORÈME IV. — *En admettant les hypothèses des théorèmes* I, II, *l'aire complète* S *de la surface* (F), *parallèle à* (f) *à la distance* λ, *est*

$$S = s + t\lambda + 4n\pi\lambda^2,$$

s désignant l'aire complète de (f), *n le nombre des points isolés pour lesquels* $f(x, y, z)$ *a sa valeur minimum, et t la courbure cylindrique complète de* (f), *c'est-à-dire l'expression*

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} t &= \int\int \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds \\ &= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm, \end{aligned}\right.$$

où les intégrations se rapportent à tous les éléments superficiels ds de la surface (f) *et à tous les éléments de volume dm renfermés dans la même surface* (f).

En terminant ce numéro, j'observerai que les résultats précédents concernant tous des intégrations étendues à des surfaces fermées complètes, peuvent, avec de légères modifications et les conditions convenables, être appliqués à des intégrations étendues à certaines portions de surfaces non fermées. Pour en donner un exemple, j'énoncerai le théoreme suivant :

THÉORÈME V. — *Soit* (E) *la portion positive de l'espace, c'est-à-dire la portion de l'espace qui correspond à des valeurs positives des coor-*

---

[*] Les dénominations imaginées par M. Steiner sont textuellement *Summe der Kantenkruemmung* et *Summe der Eckenkruemmung*. Regardez une surface comme un polyèdre, suivant l'esprit du calcul infinitésimal, et vous comprendrez comment l'illustre geometre a pu être naturellement conduit à cette façon de parler.

données; soit (f) *la surface représentée par l'équation*

$$f = c;$$

et soit f *une fonction de* x, y, z, *telle que la portion positive* s *de la surface* (f), *c'est-à-dire la portion de* f *qui se trouve dans* (E), *sépare un volume fini* (μ), *dans lequel* $f < c$, *du reste de* (E), *dans lequel* $f > c$; *soit enfin*

$$\frac{df}{dx} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ quels que soient } y \text{ et } z;$$

$$\frac{df}{dy} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ quels que soient } z \text{ et } x;$$

$$\frac{df}{dz} = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ quels que soient } x \text{ et } y.$$

Cela posé, la portion positive s *de la surface* (f) *est*

$$s = \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{df}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

où les variables doivent prendre toutes les valeurs positives propres à vérifier l'inégalité $f < c$.

5. Je ferai maintenant l'application des théorèmes I et IV à l'évaluation de l'aire entière s de l'ellipsoïde et de sa courbure cylindrique complète

$$t = \int\int \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds.$$

Les équations (6) et (11) donnent, pour ces deux intégrales, les expressions suivantes en intégrales triples :

$$s = \int\int\int G\, dm$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{df}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

$$t = \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

où

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

les intégrales étant prises pour toutes les valeurs de x, y, z propres à vérifier l'inégalité $f > c$.

Dans le cas d'un ellipsoïde aux demi-axes α, β, γ, il faut faire

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1\right), \quad c = 0.$$

Alors, en posant

$$x = \alpha x', \quad y = \beta y', \quad z = \gamma z',$$

de sorte que

$$dm = dx\,dy\,dz = \alpha\beta\gamma\,dx'dy'dz',$$

on trouve

$$s = \alpha\beta\gamma \iiint_{x'^2 + y'^2 + z'^2 < 1} \mathrm{G}\,dx'dy'dz',$$

$$t = \alpha\beta\gamma \iiint_{x'^2 + y'^2 + z'^2 < 1} \mathrm{G}'\,dx'dy'dz',$$

$$\mathrm{G} = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx'}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{x'}{\alpha}\right) + \frac{1}{\beta}\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{y'}{\beta}\right) + \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{z'}{\gamma}\right),$$

$$\mathrm{G}' = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx'}\left(\frac{\mathrm{G}}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{x'}{\alpha}\right) + \frac{1}{\beta}\frac{d}{dy'}\left(\frac{\mathrm{G}}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{y'}{\beta}\right) + \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dz}\left(\frac{\mathrm{G}}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{z'}{\gamma}\right),$$

$$\mathrm{R} = \frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} + \frac{z'^2}{\gamma^2}.$$

Une fonction ψ homogène de l'ordre zéro de x' et de α, c'est-à-dire qui ne dépend que du quotient $\frac{x'}{\alpha}$, satisfait à l'équation

$$x'\frac{d\psi}{dx'} + \alpha\frac{d\psi}{d\alpha} = 0.$$

Cette remarque permet de convertir les différentiations relatives à x', y', z', qui se trouvent dans G et dans G', en différentiations relatives à α, β, γ. On obtient ainsi :

$$\mathrm{G} = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\mathrm{R}}}\right) - \frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\beta\sqrt{\mathrm{R}}}\right) - \frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{\gamma\sqrt{\mathrm{R}}}\right),$$

$$\frac{\mathrm{G}}{\sqrt{\mathrm{R}}} = -\frac{1}{2}\alpha\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2\mathrm{R}}\right) - \frac{1}{2}\beta\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\beta^2\mathrm{R}}\right) - \frac{1}{2}\gamma\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{\gamma^2\mathrm{R}}\right).$$

L'expression de G substituée dans l'intégrale s donne :

$$s = -\alpha\beta\gamma \iiint\limits_{x'^2+y'^2+z'^2<1} \left(\beta\gamma\frac{dv}{d\alpha} + \gamma\alpha\frac{dv}{d\beta} + \alpha\beta\frac{dv}{d\gamma}\right) dx'dy'dz',$$

où

$$v = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\sqrt{R}}.$$

Les limites de l'intégration par rapport à x', y', z' étant données par une inégalité qui ne contient pas les quantités α, β, γ, on peut intervertir l'ordre de ces intégrations et des différentiations par rapport à α, β, γ. Donc, en posant

$$P = \iiint\limits_{x'^2y'^2z'^2<1} \frac{dx'dy'dz'}{\alpha\beta\gamma\sqrt{R}},$$

expression qui, en faisant

$$x' = \alpha x'', \quad y' = \beta y'', \quad z' = \gamma z'',$$

se transforme en

$$P = \iiint\limits_{\alpha^2x''^2+\beta^2y''^2+\gamma^2z''^2<1} \frac{dx''dy''dz''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}},$$

on trouve

$$(12) \qquad s = -\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\frac{dP}{d\alpha} + \frac{1}{\beta}\frac{dP}{d\beta} + \frac{1}{\gamma}\frac{dP}{d\gamma}\right).$$

En substituant la valeur de $\frac{G}{\sqrt{R}}$ dans G', on obtient neuf termes : trois de la forme

$$-\frac{1}{2\alpha}\frac{d}{dx'}\left[x'\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2R}\right)\right] = -\frac{1}{2\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx'}\left(\frac{x}{\alpha R}\right)\right] = \frac{1}{2\alpha}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha R}\right),$$

et six autres de la forme

$$-\frac{1}{2\beta}\frac{d}{dy'}\left[\frac{y'}{\beta}\gamma\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{\gamma^2R}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\left[\frac{\gamma}{\beta}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{\gamma^2R}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\beta\,d\gamma}\left(\frac{1}{\beta\gamma R}\right) - \frac{1}{2\gamma}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\beta\gamma R}\right).$$

Donc, en posant

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma R} = w,$$

on a

$$\begin{aligned} G' = {} & \frac{\beta\gamma}{2\alpha}\frac{d^2 w}{d\alpha^2} + \frac{\gamma\alpha}{2\beta}\frac{d^2 w}{d\beta^2} + \frac{\alpha\beta}{2\gamma}\frac{d^2 w}{d\gamma^2} \\ & + \alpha\frac{d^2 w}{d\beta\, d\gamma} + \beta\frac{d^2 w}{d\gamma\, d\alpha} + \gamma\frac{d^2 w}{d\alpha\, d\beta} \\ & - \frac{\beta^2+\gamma^2}{2\beta\gamma}\frac{dw}{d\alpha} - \frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\gamma\alpha}\frac{dw}{d\beta} - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\frac{dw}{d\gamma}. \end{aligned}$$

En substituant cette valeur de G' dans l'intégrale t, puis en intervertissant encore des intégrations et des différentiations, on obtient :

$$(13)\quad t = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\alpha^2}\frac{d^2 Q}{d\alpha^2} + \frac{1}{2\beta^2}\frac{d^2 Q}{d\beta^2} + \frac{1}{2\gamma^2}\frac{d^2 Q}{d\gamma^2} \\ & + \frac{1}{\beta\gamma}\frac{d^2 Q}{d\beta\, d\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 Q}{d\gamma\, d\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta}\frac{d^2 Q}{d\alpha\, d\beta} \\ & - \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{dQ}{d\alpha} - \frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{dQ}{d\beta} - \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\frac{dQ}{d\gamma} \end{aligned} \right\},$$

où

$$Q = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{\alpha\beta\gamma\, R}, \qquad x'^2 y'^2 z'^2 < 1,$$

expression qui, en posant

$$x' = \alpha x'', \quad y' = \beta y'', \quad z' = \gamma z'',$$

se transforme en

$$Q = \iiint \frac{dx''\,dy''\,dz''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}. \qquad \alpha^2 x''^2 + \beta^2 y''^2 + \gamma^2 z''^2 < 1$$

On a donc le résultat suivant :

« Désignons par P, Q le potentiel de l'ellipsoïde aux demi-axes » $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ relatif au centre et pour des attractions respectivement pro- » portionnelles aux puissances -2, -3 de la distance, de sorte » qu'en désignant par dm l'élément de volume, on ait

$$P = \iiint \frac{dm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad Q = \iiint \frac{dm}{x^2+y^2+z^2},$$

» où les variables prennent toutes les valeurs propres à vérifier l'inc- » galité

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 < 1.$$

» Soient ds la surface complète de l'ellipsoïde aux demi-axes α, β, γ;
» ρ, ρ' ses rayons de courbure principaux; t l'intégrale

$$\int\int\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)ds,$$

» rapportée à tous les éléments ds de la surface s. Cela posé, les inté-
» grales s, t dépendent de P, Q, au moyen des équations

$$(12)\qquad s=-\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\frac{dP}{d\alpha}+\frac{1}{\beta}\frac{dP}{d\beta}+\frac{1}{\gamma}\frac{dP}{d\gamma}\right),$$

$$(12)\qquad t=\alpha^2\beta^2\gamma^2\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\alpha^2}\dfrac{d^2Q}{d\alpha^2}+\dfrac{1}{2\beta^2}\dfrac{d^2Q}{d\beta^2}+\dfrac{1}{2\gamma^2}\dfrac{d^2Q}{d\gamma^2}\\ +\dfrac{1}{\beta\gamma}\dfrac{d^2Q}{d\beta\,d\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}\dfrac{d^2Q}{d\gamma\,d\alpha}+\dfrac{1}{\alpha\beta}\dfrac{d^2Q}{d\alpha\,d\beta}\\ -\dfrac{1}{2\alpha}\left(\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}\right)\dfrac{dQ}{d\alpha}-\dfrac{1}{2\beta}\left(\dfrac{1}{\gamma^2}+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)\dfrac{dQ}{d\beta}\\ -\dfrac{1}{2\gamma}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}\right)\dfrac{dQ}{d\gamma}\end{array}\right\}.\text{ »}$$

Cette liaison entre différentes intégrales multiples ne me semble pas indigne de l'attention des géomètres, d'autant plus qu'on y est parvenu sans avoir eu besoin d'évaluer auparavant ces intégrales. Entre les expressions finales en intégrales simples, pour l'aire de l'ellipsoïde et pour les attractions de l'ellipsoïde à axes réciproques sur un point intérieur, M. Jellett a remarqué une liaison analogue à celle qui existe entre P et s, mais qui pourtant en est différente (*voir* le t. XII de ce Journal, p. 92, année 1847).

Les équations (12), (13) conduisent aux expressions finales de s et t par la substitution des valeurs de P et Q en intégrales simples. On a généralement

$$\int\int\int\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{p-1}{2}}}$$

$$=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{p}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{u^{\frac{p-3}{2}}\,du}{\sqrt{(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}}$$

$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2<1$$

(*voir* le Mémoire de M. Dirichlet, *Académie de Berlin*, année 1839, page 77); de là, pour $p = 2$ et $p = 3$,

$$P = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \pi \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}}.$$

$$Q = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2} = 2\pi \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}}.$$

(Ces valeurs de P, Q peuvent également être prises dans le Mémoire de Jacobi : *De transformatione et determinatione integralium duplicium*, Journal de M. Crelle, tome X, page 101.)

Faisons

$$\alpha^2 = \alpha', \quad \beta^2 = \beta', \quad \gamma^2 = \gamma',$$

$$\varphi(u) = (u+\alpha')(u+\beta')(u+\gamma');$$

de sorte que

$$P = \pi \int_0 \frac{du}{\sqrt{u\varphi(u)}}, \qquad Q = 2\pi \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}}:$$

$$\frac{dP}{d\alpha} = 2\alpha\frac{dP}{d\alpha}, \quad \frac{d^2Q}{d\alpha^2} = 2\frac{dQ}{d\alpha'} + 4\alpha\frac{d^2Q}{d\alpha'^2}, \quad \frac{d^2Q}{d\beta\,d\gamma}\,4\beta\gamma\frac{d^2Q}{d\beta'\,d\gamma'}, \ldots$$

Ces valeurs, substituées dans les équations (12), (13), donnent

$$\begin{aligned} s &= -2\alpha'\beta'\gamma'\left(\frac{dP}{d\alpha'} + \frac{dP}{d\beta'} + \frac{dP}{d\gamma'}\right) \\ &= -2\pi\alpha'\beta'\gamma'\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}}\left\{\frac{d}{d\alpha'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] + \frac{d}{d\beta'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] + \frac{d}{d\gamma'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right]\right\} \\ &= -2\pi\alpha'\beta'\gamma'\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}}\,\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right]; \end{aligned}$$

et de même,

$$t = \alpha'\beta'\gamma'\left\{\begin{aligned} & 2\frac{d^2Q}{d\alpha'^2} + 2\frac{d^2Q}{d\beta'^2} + 2\frac{d^2Q}{d\gamma'^2} \\ & + 4\frac{d^2Q}{d\beta'\,d\gamma'} + 4\frac{d^2Q}{d\gamma'\,d\alpha'} + 4\frac{d^2Q}{d\alpha'\,d\beta'} \\ & - \left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\right)\left(\frac{dQ}{d\alpha'} + \frac{dQ}{d\beta'} + \frac{dQ}{d\gamma'}\right) \\ & + \frac{2}{\alpha'}\frac{dQ}{d\alpha'} + \frac{2}{\beta'}\frac{dQ}{d\beta'} + \frac{2}{\gamma'}\frac{dQ}{d\gamma'} \end{aligned}\right\}.$$

Or

$$\frac{dQ}{d\alpha'} + \frac{dQ}{d\beta'} + \frac{dQ}{d\gamma'}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty du \left\{ \frac{1}{d\alpha'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] + \frac{d}{d\beta'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] + \frac{d}{d\gamma'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] \right\}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty du \frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{\varphi(\infty)}} - \frac{2\pi}{\sqrt{\varphi(0)}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha'\beta'\gamma'}},$$

$$\frac{d^2Q}{d\alpha'^2} + \frac{d^2Q}{d\beta'^2} + \frac{d^2Q}{d\gamma'^2} + 2\frac{d^2Q}{d\beta' d\gamma'} + 2\frac{d^2Q}{d\gamma' d\alpha'} + 2\frac{d^2Q}{d\alpha' d\beta'}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty du \frac{d^2}{du^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] = -\pi \int_0^\infty du \frac{d}{du}\left\{\frac{\varphi'(u)}{[\varphi(u)]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$= -\frac{\pi\varphi'(\infty)}{[\varphi(\infty)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\pi\varphi'(0)}{[\varphi(0)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha'\beta'\gamma'}}\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha'}\frac{dQ}{d\alpha'} + \frac{1}{\beta'}\frac{dQ}{d\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\frac{dQ}{d\gamma'}$$

$$= -\pi \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}}\left(\frac{1}{\alpha'}\cdot\frac{1}{u+\alpha'} + \frac{1}{\beta'}\cdot\frac{1}{u+\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\cdot\frac{1}{u+\gamma'}\right)$$

$$= \pi \int_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{\varphi(u)}}\left[\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} - \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}\right]$$

$$= -2\pi \int_0^\infty \frac{du}{u}\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] - \pi\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\right)\int_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{\varphi(u)}}.$$

donc on obtient, comme expression finale de t,

$$t = 4\pi\sqrt{\alpha'\beta'\gamma'}\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\right)$$

$$- 2\pi\alpha'\beta'\gamma'\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\alpha'}\right)\int_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{\varphi(u)}} - 4\pi\alpha'\beta'\gamma'\int_0^\infty \frac{du}{u}\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right].$$

Ces résultats se résument comme il suit :

« Soient ρ, ρ' les rayons de courbure principaux d'un ellipsoïde » aux demi-axes α, β, γ; soit s l'aire complète de sa surface, et t sa » courbure cylindrique complète, c'est-à-dire l'intégrale

$$\iint \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds$$

» étendue à tous les éléments ds de sa surface. Cela posé, on a

$$s = -2\pi\alpha^2\beta^2\gamma^2 \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} \frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}}\right],$$

$$t = 4\pi\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$$

$$- 2\pi(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2) \int_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}}$$

$$- 4\pi\alpha^2\beta^2\gamma^2 \int_0^\infty \frac{du}{u} \frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}}\right]. \text{ »}$$

L'aire complète s de l'ellipsoïde, évaluée pour la première fois par Legendre, et puis d'une manière bien simple par Jacobi, a déjà été présentée sous la même forme symétrique relativement aux axes par M. Cayley, qui l'a obtenue au moyen de considérations très-différentes (*voir* le tome XIII de ce Journal, page 267).

Les exemples que je viens de donner suffiront pour montrer l'avantage qu'offre la transformation des intégrales rapportées à la surface, en intégrales rapportées au volume.

Note à l'occasion du Mémoire précédent;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. En désignant par u, v, w trois fonctions de x, y, z, continues et bien déterminées dans toute l'étendue où on les emploie, on réduit aisément l'intégrale triple

$$\int\int\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)dxdydz,$$

qui concerne les éléments $dxdydz$ d'un volume contenu dans une surface fermée (f), à une intégrale double

$$\int\int(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\,d\omega,$$

qui n'est plus relative qu'aux éléments $d\omega$ de la surface (f), et où α, β, γ sont les angles que la normale à $d\omega$, dirigée hors du volume, fait avec les trois axes rectangulaires des coordonnées x, y, z. C'est ainsi que dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1855, j'ai de l'équation

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$$

déduit celle-ci

$$\int\int(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\,d\omega=0,$$

qu'on aurait pu, du reste, à l'endroit indiqué, poser *à priori*, s'il n'avait été bon de montrer tout d'abord, sur un cas simple, la marche d'un calcul qui devait se reproduire plus d'une fois dans le cours du Mémoire.

L'équation

$$\int\int\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)dxdydz$$
$$=\int\int(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\,d\omega$$

a été, au surplus, souvent employée, explicitement ou implicitement, dans ce Journal. L'analyse qui la fournit, et qui démontre en même temps les trois suivantes dont elle se compose,

$$\int\int\int\frac{du}{dx}\,dx\,dy\,dz=\int\int u\cos\alpha\,d\omega,$$
$$\int\int\int\frac{dv}{dy}\,dx\,dy\,dz=\int\int v\cos\beta\,d\omega,$$
$$\int\int\int\frac{dw}{dz}\,dx\,dy\,dz=\int\int w\cos\gamma\,d\omega,$$

a été développée avec beaucoup de soin par M. Gauss dans le Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes que M. Borchardt cite; mais quoique ce Mémoire remonte à l'année 1813, les formules elles-mêmes étaient, si je ne me trompe, déjà connues antérieurement. Peu importe, au reste, pour l'objet que nous avons ici en vue. Contentons-nous de partir de l'équation rappelée plus haut, comme d'une équation familière à nos lecteurs.

2. Maintenant, soit

$$f(x,y,z)=\text{constante},$$

ou, pour abréger,

$$f=\text{constante},$$

l'équation de la surface fermée (f) dont $d\omega$ est l'élément, et posons

$$R=\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2:$$

nous aurons

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx},\quad\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy},\quad\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz},$$

en fixant convenablement le signe du radical. Ces valeurs des trois cosinus sont des fonctions de x, y, z: on peut conserver ces fonctions

telles qu'elles sont; on pourrait aussi les modifier, et, par exemple, les réduire à des fonctions de deux variables seulement, au moyen de l'équation de la surface. Modifiées ou non, désignons-les par

$$\mathrm{L},\ \mathrm{M},\ \mathrm{N};$$

en sorte que L, M, N soient trois fonctions de x, y, z, conservant un sens précis pour chaque point de l'intérieur de (f), et devenant respectivement égales aux valeurs de nos trois cosinus sur la surface (f).

3. Cela étant, si l'on demande que les fonctions u, v, w du n° **1** soient telles qu'on ait, à la surface de (f),

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = \varphi,$$

φ ou $\varphi(x, y, z)$ étant une fonction de x, y, z à volonté, la réponse la plus simple à cette question, naturellement susceptible d'une infinité de solutions, sera de prendre

$$u = \mathrm{L}\varphi, \quad v = \mathrm{M}\varphi, \quad w = \mathrm{N}\varphi;$$

en effet, cela donne, à la surface,

$$u = \varphi\cos\alpha, \quad v = \varphi\cos\beta, \quad w = \varphi\cos\gamma,$$

et l'équation demandée s'ensuit, puisque

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

D'après le n° **1**, il vient dès lors

$$\iiint\left(\frac{d.\mathrm{L}\varphi}{dx} + \frac{d.\mathrm{M}\varphi}{dy} + \frac{d.\mathrm{N}\varphi}{dz}\right)dxdydz$$
$$= \iint\varphi(x, y, z)\,d\omega.$$

En particulier

$$\iiint\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dz}\right)\right]dxdydz$$
$$= \iint\varphi(x, y, z)\,d\omega.$$

C'est la formule fondamentale de M. Borchardt.

4. Mais M. Borchardt ajoute des détails intéressants où figurent les rayons de courbure principaux de la surface (f). Sans le suivre dans

cette partie de son Mémoire, qui a été, on ne peut en douter, son objet principal, je vais du moins donner une courte démonstration de l'équation par laquelle il détermine les rayons de courbure dont il est question.

Au point m ou (x, y, z) de la surface (f) menons la normale mn, et au point infiniment voisin m' ou $(x + dx, y + dy, z + dz)$ la normale $m'n'$; si mm' est la direction d'une ligne de courbure, mn et $m'n'$ se rencontreront en un point o à une certaine distance $om = om'$ des deux points m, m' : soit λ cette distance [que je prends négative ou positive suivant que mo est ou n'est pas sur la partie de la normale mn extérieure à (f)]; les coordonnées du point o, en tant qu'il appartient à la normale mn, seront

$$x - \lambda \cos\alpha, \quad y - \lambda \cos\beta, \quad z - \lambda \cos\gamma;$$

mais en tant qu'il appartient à la normale $m'n'$, elles seront exprimées par ces mêmes quantités augmentées de leurs différentielles : ces différentielles seront donc nulles, et on devra avoir

$$dx - \lambda\, d\cos\alpha = 0, \quad dy - \lambda\, d\cos\beta = 0, \quad dz - \lambda\, d\cos\gamma = 0,$$

si mm' est la direction d'une ligne de courbure; de plus, dans ce cas, λ sera le rayon de courbure de la section principale correspondante.

Les trois équations que je viens d'écrire se réduisent au fond à deux, car si on les multiplie par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et qu'on les ajoute, on trouvera une identité, puisque, d'une part,

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0,$$

vu que mm' et mn sont à angle droit, et que, d'autre part,

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0.$$

En les développant, il vient

$$\left(1 - \lambda \frac{d\cos\alpha}{dx}\right) dx - \lambda \frac{d\cos\alpha}{dy}\, dy - \lambda \frac{d\cos\alpha}{dz}\, dz = 0,$$

$$-\lambda \frac{d\cos\beta}{dx}\, dx + \left(1 - \lambda \frac{d\cos\beta}{dy}\right) dy - \lambda \frac{d\cos\beta}{dz}\, dz = 0,$$

$$-\lambda \frac{d\cos\gamma}{dx}\, dx - \lambda \frac{d\cos\gamma}{dy}\, dy + \left(1 - \lambda \frac{d\cos\gamma}{dz}\right) dz = 0;$$

éliminant donc dx, dy, dz, qui n'entrent que par leurs rapports, on arrive à conclure que λ, c'est-à-dire chacun des deux rayons de courbure principaux de la surface (f), vérifie l'équation

$$\text{Déterminant}\begin{vmatrix} 1-\lambda\dfrac{d\cos\alpha}{dx}, & -\lambda\dfrac{d\cos\alpha}{dy}, & -\lambda\dfrac{d\cos\alpha}{dz} \\ -\lambda\dfrac{d\cos\beta}{dx}, & 1-\lambda\dfrac{d\cos\beta}{dy}, & -\lambda\dfrac{d\cos\beta}{dz} \\ -\lambda\dfrac{d\cos\gamma}{dx}, & -\lambda\dfrac{d\cos\gamma}{dy}, & 1-\lambda\dfrac{d\cos\gamma}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle revient au fond à celle de M. Borchardt, qu'on pourra ainsi introduire dans les éléments.

Je n'insiste pas sur ce que notre méthode offre en même temps, relativement aux lignes de courbure, le long desquelles nous voyons qu'on a toujours

$$d\cos\alpha : d\cos\beta : d\cos\gamma :: dx : dy : dz.$$

Mais je dois faire observer que, dans une Note insérée au tome XVII du présent Journal, j'annonçais la solution d'un problème bien plus général, à savoir celui de déterminer la direction et la courbure des sections principales ou plutôt le rayon de courbure d'une section normale quelconque d'une surface représentée par une équation entre des coordonnées u_1, u_2, u_3 dont la signification géométrique n'est pas connue, et pour lesquelles on sait seulement que le carré ds^2 de la droite qui joint deux points infiniment voisins a une expression donnée. Le principe de cette solution est on ne peut plus simple; mais le calcul exige quelques développements : ce sera l'objet d'un prochain article.

Revenons à l'équation en λ, qui fournit les deux rayons de courbure principaux ρ, ρ' de la surface (f). Cette équation ne doit être et n'est en effet que du second degré; car le coefficient du terme en λ^3 qui se présente d'abord, lorsqu'on développe le déterminant placé au premier membre, est égal au signe près à la quantité suivante

$$\frac{d\cos\alpha}{dx}\frac{d\cos\beta}{dy}\frac{d\cos\gamma}{dz} - \frac{d\cos\alpha}{dx}\frac{d\cos\gamma}{dy}\frac{d\cos\beta}{dz} + \frac{d\cos\gamma}{dx}\frac{d\cos\alpha}{dy}\frac{d\cos\beta}{dz}$$
$$- \frac{d\cos\beta}{dx}\frac{d\cos\alpha}{dy}\frac{d\cos\gamma}{dz} + \frac{d\cos\beta}{dx}\frac{d\cos\gamma}{dy}\frac{d\cos\alpha}{dz} - \frac{d\cos\gamma}{dx}\frac{d\cos\beta}{dy}\frac{d\cos\alpha}{dz}.$$

que l'on trouve égale à zéro, en exprimant que $\cos\gamma$ est une fonction de $\cos\alpha$ et $\cos\beta$.

On aurait eu de suite une équation sans terme apparent en λ^3 si, au lieu d'éliminer dx, dy, dz entre les trois équations

$$dx - \lambda\, d\cos\alpha = 0, \quad dy - \lambda\, d\cos\beta = 0, \quad dz - \lambda\, d\cos\gamma = 0.$$

on s'était servi de deux équations déduites de celles-là, et de l'équation

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0;$$

mais le calcul eût été moins élégant. En opérant comme nous l'avons fait, on a d'ailleurs l'avantage de retrouver exactement les résultats de M. Borchardt. Nos formules définitives sont

$$1 - G\lambda + H\lambda^2 = 0, \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = G, \quad \frac{1}{\rho\rho'} = H,$$

et nos valeurs de G et H, savoir

$$G = \frac{d\cos\alpha}{dx} + \frac{d\cos\beta}{dy} = \frac{d\cos\gamma}{dz}.$$

et

$$H = \frac{d\cos\alpha}{dx}\frac{d\cos\beta}{dy} + \frac{d\cos\gamma}{dz}\frac{d\cos\alpha}{dx} + \frac{d\cos\beta}{dy}\frac{d\cos\gamma}{dz}$$
$$- \frac{d\cos\alpha}{dy}\frac{d\cos\beta}{dx} - \frac{d\cos\gamma}{dx}\frac{d\cos\alpha}{dz} - \frac{d\cos\beta}{dz}\frac{d\cos\gamma}{dy}.$$

coïncident (quand on y remplace les cosinus par leurs valeurs) avec celles que l'habile géomètre de Berlin a obtenues dans son élégant travail.

Sur un essai de déterminer la nature de la racine d'une équation du troisième degré, contenu dans un ouvrage de Léonard de Pise découvert par M. le prince Balthasar Boncompagni;

PAR M. WOEPCKE.

Lorsque la science grecque, après avoir brillé d'un éclat extraordinaire, allait dépérir entre les mains des compilateurs byzantins, elle fut conservée, étudiée, continuée par les Arabes. Lorsque la science arabe à son tour fut menacée de décadence par les luttes immenses qui bouleversaient l'Orient, la Providence lui ouvrit un asile chez les Italiens. C'est là que commence le développement des mathématiques modernes, c'est de là qu'il part pour dépasser de bien loin tout ce qu'ont produit les siècles précédents.

On aime à rattacher chaque grande époque de transition au nom et aux œuvres de l'homme qui en offre l'expression la plus haute : pour le passage de la science, des Arabes aux Italiens, cet homme éminent est Léonard de Pise, dit Fibonacci.

On conçoit dès lors l'importance que les ouvrages de cet auteur doivent avoir pour l'histoire des sciences mathématiques. Et cependant ces ouvrages ne nous étaient jusqu'à présent que très-imparfaitement connus. Un chapitre de son *Traité de l'Abacus ;* des emprunts faits à son *Traité des nombres carrés* par plusieurs géomètres de la Renaissance; quelques citations de sa *Pratique de la Géométrie :* voilà tout ce que nous possédions. Encore, tandis que du premier et du dernier des ouvrages cités, il existe au moins des manuscrits dans les grandes bibliothèques de l'Europe, l'original du *Traité des nombres carrés,* sous certains rapports le plus intéressant des trois ouvrages, paraissait être entièrement perdu. Le seul manuscrit de ce

Traité, dont l'existence eût été sûrement constatée, n'avait pu être retrouvé [*].

D'après cet exposé des faits, on appréciera le service qu'a rendu M. le prince Balthasar Boncompagni en découvrant et en publiant non-seulement le *Traité des nombres carrés*, mais, en outre, deux autres écrits de Léonard de Pise, inconnus auparavant [**].

Un de ces deux derniers écrits, intitulé *Flos*, contient la discussion dont on trouve ci-après l'analyse, et qui peut fournir une mesure du haut intérêt qu'offrent ces travaux de Fibonacci.

Jean de Palerme, philosophe de l'empereur Frédéric II de la maison de Souabe, ayant proposé à Léonard de Pise l'équation du troisième degré

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

celui-ci démontre que la racine de cette équation n'est ni un nombre entier, ni une fraction, ni aucune des quantités composées de radicaux du second degré traitées dans le Xe livre des Éléments d'Euclide.

N'y a-t-il pas là quelque chose de très-remarquable? Si à une époque récente la démonstration qu'une équation algébrique d'un degré supérieur au quatrième ne peut pas être généralement satisfaite par une expression composée de radicaux, a exigé les plus grands efforts des géomètres, ne devra-t-on pas accorder un certain intérêt à la démonstration, entreprise par un algébriste du XIIIe siècle, qu'une équation proposée du troisième degré ne peut être résolue par aucune des combinaisons de radicaux du deuxième degré connues à cette époque?

Avant de procéder à l'analyse de la démonstration de Fibonacci, il faut que je fasse observer deux choses. Premièrement, le géomètre

---

[*] Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi ia essa, dell' Algebra*, tome Ier, page 165.

[**] *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano, pubblicati da Baldassarre Boncompagni*; Firenze, 1854. Cette publication forme la première partie d'un ouvrage étendu que M. le prince Boncompagni fera paraître prochainement sous le titre suivant : *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*.

de Pise suppose que l'inconnue est une quantité positive. Disciple des Arabes, il ignore, comme eux, l'existence des racines négatives; toutefois c'est chez lui que se trouvent les premières tentatives de considérer des solutions négatives, autre détail très-curieux que présentent les ouvrages publiés par M. Boncompagni, mais sur lequel je ne peux pas m'étendre ici. Secondement, les démonstrations de Fibonacci sont géométriques; forme sous laquelle les quantités irrationnelles sont traitées aussi dans le Xe livre d'Euclide. En reproduisant, par défaut d'espace, les raisonnements de Fibonacci sous la forme algébrique qui suit, nous gagnons en précision, mais non en clarté.

1°. x n'est pas un nombre entier.

En effet, de l'équation proposée, il suit

$$x = 2 - \frac{x^3 + 2x^2}{10} \quad \text{ou} \quad x < 2;$$

il n'y a donc que 1 qui puisse satisfaire; mais pour $x = 1$, il vient

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 13 < 20.$$

2°. x n'est pas un nombre fractionnaire.

Soit

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\,[*].$$

Si $10\frac{\alpha}{\beta}$ est fractionnaire, $2\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ le sera à plus forte raison, et l'on aura

$$2\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{m}{\beta^2} + \frac{n}{\beta}, \quad \text{où} \quad m < \beta;$$

de même,

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} = \frac{p}{\beta^3} + \frac{q}{\beta^2} + \frac{r}{\beta}, \quad \text{où} \quad p < \beta,\ q < \beta\,[**].$$

---

[*] On suppose naturellement la fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ exprimée dans les plus petits nombres possibles.

[**] Le texte porte : *Et in numero quidem bz* (x^3) *occurrunt fractiones et fractiones fractionis, et fractiones fractionis fractionis.*

On ne peut être parfaitement sûr du véritable sens de ce passage qu'au moyen d'une étude préalable de l'arithmétique des Arabes. Qu'on ait à évaluer le cube $\left(\frac{7}{9}\right)^3$;

Or

$$\frac{p}{\beta^3} + \frac{q+m}{\beta^2} + \frac{r+n+10\alpha}{\beta}$$

ne pourra jamais être un nombre entier, donc pas égal à 20.

Si $10\frac{\alpha}{\beta}$ est entier, il s'ensuivra que

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} + 2\frac{\alpha^2}{\beta^2} = 20 - 10\frac{\alpha}{\beta}$$

est entier, ce dont on démontre l'impossibilité de la même manière [*].

3°. x n'est pas de la forme $\sqrt{n}$.

De l'équation proposée, il suit

$$\frac{2x^2}{10} = 2 - \left(x + \frac{x^3}{10}\right),$$

c'est-à-dire la quantité rationnelle $\frac{2.n}{10}$ égale à la quantité irrationnelle (*l'apotome*) $2 - \sqrt{n}\left(1 + \frac{n}{10}\right)$, ce qui est impossible.

Autrement. Puisque

$$20 = 2x^2 + 10x\left(1 + \frac{x^2}{10}\right),$$

il s'ensuivrait que le nombre entier 20 serait égal à la somme de la

---

l'arithméticien arabe n'écrira pas $\frac{343}{729}$; ce qu'il considère comme la forme normale de cette fraction c'est : quatre neuvièmes et deux neuvièmes d'un neuvième et un neuvième d'un neuvième d'un neuvième, et il écrit cette expression de la manière suivante $\frac{124}{999}$; de même, pour $\left(\frac{2}{9}\right)^2$, il écrira $\frac{800}{999}$. Cette réduction des fractions à leur forme normale constitue une partie essentielle de l'arithmétique arabe, appelée *la dénomination des fractions*.

(*) Autrement dit :

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} + 2\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 10\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^3 + (2\alpha^2 + 10\alpha\beta)\beta}{\beta^3},$$

mais $(2\alpha^2 + 10\alpha\beta)\beta$ divisible par β, et α^3 non divisible par β; donc $\alpha^3 + (2\alpha^2 + 10\alpha\beta)\beta$ non divible par β et a plus forte raison non divisible par β^3.

quantité rationnelle $2n$ et de la quantité irrationnelle $\sqrt{n}\cdot 10\left(1+\frac{n}{10}\right)$, ce qui est impossible.

4°. x n'est pas de la forme $\sqrt[4]{n}$.

Car de

$$x+\frac{x^3}{10}=2-\frac{2x^2}{10},$$

il s'ensuivrait que la quantité $\sqrt[4]{n}+\frac{\sqrt[4]{n}\sqrt{n}}{10}$, qui est *la première de deux médiales* (*voir* Euclide, X, 38) serait égale à *l'apotome* $2-\frac{2\sqrt{n}}{10}$, deux quantités irrationnelles dont Euclide a démontré l'hétérogénéité.

5°. x n'est pas de la forme $m+\sqrt{n}$.

Car, en substituant dans

$$x^3+2x^2+10x=20,$$

on obtiendrait la quantité irrationnelle (*celle de deux noms*)

$$(m^3+2m^2+3mn+10m+2n)+(3m^2+4m+n+10)\sqrt{n}$$

égale au nombre rationnel 20, ce qui est impossible.

6°. x n'est pas de la forme $\sqrt{m}+\sqrt{n}$.

Car en substituant dans

$$x^3+2x^2+10x=20,$$

on obtiendrait la quantité irrationnelle

$$(2m+2n)+(m+3n+10)\sqrt{m}+(n+3m+10)\sqrt{n}+4\sqrt{mn}$$

égale à 20, ce qui est impossible.

7°. x n'est pas de la forme $\sqrt{m+\sqrt{n}}$ [*].

Car de

$$x^3+2x^2+10x=20,$$

---

[*] Le cas où $\sqrt{m+\sqrt{n}}$ est de la forme $m'+\sqrt{n'}$, d'où l'on retomberait dans le cas 5°, est prévu par Fibonacci et exclu, observation que la théorie d'Euclide fournit d'ailleurs d'elle-même.

il s'ensuivrait

$$\begin{aligned}
&(x^2+10)x+2x^2\\
&=\sqrt{[(10+m)+\sqrt{n}]^2(m+\sqrt{n})}+2m+2\sqrt{n}\\
&=\sqrt{(p+q\sqrt{n})(m+\sqrt{n})}+2m+2\sqrt{n}\\
&=2m+2\sqrt{n}+\sqrt{r+s\sqrt{n}}=20,
\end{aligned}$$

ce qui est impossible.

8°. x n'est pas de la forme $\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$.

Car de

$$x^3+2x^2+10x=20.$$

il s'ensuivrait

$$\begin{aligned}
&(x^2+10)x+2x^2\\
&=\sqrt{(10+\sqrt{m}+\sqrt{n})^2(\sqrt{m}+\sqrt{n})}+2\sqrt{m}+2\sqrt{n}\\
&=\sqrt{p'+q'\sqrt{m}+r'\sqrt{n}+s'\sqrt{mn}}+2\sqrt{m}+2\sqrt{n}=20,
\end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Aucune des quantités examinées ne pouvant satisfaire à l'équation proposée, Fibonacci résout celle-ci par approximation [*], et trouve

$$x=1.22'\,7''\,42'''\,30^{\text{iv}}\,4^{\text{v}}\,40^{\text{vi}}.$$

J'obtiens

$$\begin{aligned}
x&=1{,}3688081078 21\\
&=1.22'\,7''\,42'''\,33^{\text{iv}}\,4^{\text{v}}\,38^{\text{vi}},5;
\end{aligned}$$

sans doute 30^{iv} au lieu de 33^{iv} n'est qu'une erreur du copiste (d'autant plus que j'ai rencontré précisément la même erreur en plusieurs autres passages du texte publié [**]); le degré d'exactitude de cette valeur approchée est donc très-remarquable, et porte à croire qu'une connaissance exacte des méthodes employées à cette époque dans des calculs de ce genre offrirait un véritable intérêt pour l'histoire de la science.

---

[*] *Studui solutionem ejus ad propinquitatem reducere.*

[**] *Voir*, par exemple, page 23, ligne 8 et ligne 25; page 24, ligne 12 : là l'erreur est évidente. Le copiste a toujours mis XXX au lieu de XXXIII.

Théorème relatif aux intersections d'un certain système de courbes ou de surfaces;

PAR M. WOEPCKE.

Nous avons considéré dans une Note précédente (*voir* le cahier de novembre, page 355 du présent volume) le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{llll}
U=0, \quad C_1 = 0, & C_2 = 0, \ldots, & C_{n-1} = 0, & C_n = 0, \\
A_1 = U + \lambda_1 C_1 = 0, & A_2 = U + \lambda_2 C_2 = 0, \ldots, & A_{n-1} = U + \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0, & A_n = U + \lambda_n C_n = 0, \\
 & \Sigma_{1,2} = \lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 = 0, \ldots, & \Sigma_{1,n-1} = \lambda_1 C_1 - \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0, & \Sigma_{1,n} = \lambda_1 C_1 - \lambda_n C_n = 0, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & \Sigma_{n-2,n-1} = \lambda_{n-2} C_{n-2} - \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0, & \Sigma_{n-2,n} = \lambda_{n-2} C_{n-2} - \lambda_n C_n = 0, \\
 & & & \Sigma_{n-1,n} = \lambda_{n-1} C_{n-1} - \lambda_n C_n = 0;
\end{array}$$

en regardant $U = 0$, $C_1 = 0, \ldots, C_n = 0$ comme des équations de sections coniques.

Soient maintenant $U = 0$, $C_1 = 0, \ldots, C_n = 0$ des équations de courbes ou de surfaces de degré m. On obtiendra les deux théorèmes que voici :

1°. « Étant donnée une courbe U de degré m, si l'on prend sur U » un nombre n de systèmes de $\frac{1}{2} m (m + 3) - 1$ points. indépendants » les uns des autres, et si l'on fait passer par chacun de ces systèmes » un couple de courbes C et A de degré m : en prenant deux couples » quelconques C_α, A_α et C_β, A_β, les points d'intersection de C_α avec » C_β et de A_α avec A_β seront sur une courbe du $m^{ième}$ degré $\Sigma_{\alpha,\beta}$, qui » passe, en outre, par les points d'intersection de $n - 2$ couples » d'autres courbes du $m^{ième}$ degré, savoir par les points d'intersection » de tous les couples $\Sigma_{\rho,\alpha}$, $\Sigma_{\rho,\beta}$ que l'on obtient en donnant à ρ suc- » cessivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, à l'exception de $\rho = \alpha$ et $\rho = \beta$. »

2°. « Étant donnée une surface U de degré m, si l'on prend sur U » un nombre n de systèmes de $\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)-2$ points, » indépendants les uns des autres, et si l'on fait passer par chacun » de ces systemes un couple de surfaces C et A de degré m : en pre- » nant deux couples quelconques C_α, A_α et C_β, A_β, les courbes d'in- » tersection de C_α avec C_β et de A_α avec A_β seront sur une surface du » $m^{ième}$ degré $\Sigma_{\alpha,\beta}$ qui passe, en outre, par les courbes d'intersection » de $n-2$ couples d'autres surfaces du $m^{ième}$ degré, savoir par les » courbes d'intersection de tous les couples $\Sigma_{\rho,\alpha}$, $\Sigma_{\rho,\beta}$ que l'on ob- » tient en donnant à ρ successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, à l'excep- » tion des valeurs $\rho = \alpha$ et $\rho = \beta$. »

Note sur la variation annuelle de l'inclinaison de l'axe de rotation de la lunette méridienne de Gambey;

PAR M. ERNEST LIOUVILLE.

Pendant le temps où, sous la direction de M. Arago, j'ai été attaché comme élève-astronome à l'Observatoire de Paris, la lunette méridienne de Gambey a été pour moi l'objet de recherches spéciales. J'ai déjà, dans un Mémoire lu à l'Académie le 22 mai 1854, donné quelques-uns des résultats auxquels j'étais arrivé touchant les variations de l'azimut et de la mire; je vais y joindre ceux que j'ai obtenus sur la variation annuelle de l'inclinaison de l'axe de rotation.

Il n'est pas question ici des variations diurnes; il résulte des diverses comparaisons que j'ai faites entre les observations d'un même jour pour une période de plusieurs années, que les différences sont généralement très-petites et très-irrégulières : je veux dire qu'aux mêmes instants du jour on trouve qu'elles ont lieu tantôt dans un sens, tantôt dans un autre. Comme les amplitudes de ces différences sont ordinairement au-dessous d'un tiers de partie du niveau, et que cette limite est à peu près celle de la précision qu'on peut atteindre avec les niveaux, dont les indications sont faussées par une multitude de circonstances, on ne peut guère les distinguer des erreurs d'observation.

Quoi qu'il en soit je n'ai étudié que la variation annuelle. Je me suis servi pour cette recherche d'un grand niveau à bulle d'air qui se plaçait sur la partie non frottante des tourillons de la lunette, et j'ai suivi mes expériences pendant tout le cours de l'année 1853 et le mois de janvier 1854. Je donne ici les résultats de ces expériences, bornées malheureusement à une seule année, et que j'ai dû interrompre le 2 février 1854; je ne suis plus même à portée de les compa-

rer à ceux auxquels d'autres observateurs ont pu arriver avec le même instrument; je parle seulement de ce que j'ai vu.

J'ai d'abord remarqué que l'inclinaison de l'axe ne suivait pas dans ses variations une marche *continue et régulière*, qu'elle changeait au contraire par *sauts brusques* et en *oscillant* pendant quelques jours autour d'une certaine moyenne qu'elle finissait par dépasser, pour recommencer à varier par sauts brusques et à osciller autour d'une autre moyenne, après être demeurée quelque temps stationnaire.

Ainsi, pour ne citer qu'un exemple, l'inclinaison qui du 26 septembre au 8 octobre était à peu près constante et de $1^{p},20$ (une partie vingt centièmes) du niveau vers l'ouest, passe du 8 au 9 à $1^{p},79$, reste la même le 9 et le 10, est le 11 de $1^{p},55$, le 12 de $2^{p},08$, revient le 13 à $1^{p},50$, et demeure la même jusqu'au 17, puis varie de nouveau brusquement et par oscillations. Plusieurs sauts brusques et plusieurs oscillations peuvent du reste avoir lieu dans l'intervalle de temps qui sépare deux repos successifs.

Mais si, au lieu de comparer une observation isolée aux observations qui l'entourent, on prend une position moyenne de l'axe de rotation, pour un mois par exemple, et si on la compare aux positions moyennes, pour les mois suivants, obtenues en faisant la moyenne des positions observées dans le courant de chaque mois, on élimine, en grande partie du moins, les variations accidentelles ou diurnes, et l'on peut mettre ainsi en évidence la variation annuelle si elle existe.

C'est en procédant de cette manière sur environ deux cents observations faites par moi pendant l'année 1853 et le mois de janvier 1854, que j'ai formé le tableau suivant qui renferme les positions moyennes de l'axe de rotation de la lunette pour les différents mois où mes expériences ont eu lieu. Chaque fois qu'il a fallu rectifier l'instrument j'ai eu soin de prendre, immédiatement avant et immédiatement après, les indications du niveau, et de tenir compte de la différence en l'ajoutant avec son signe à toutes les lectures postérieures, de manière à relier entre elles, autant que possible, toutes mes séries. Ce sont les moyennes des lectures ainsi rendues comparables qu'on trouve dans mon tableau; l'inclinaison y est évaluée en parties

du niveau dont chacune vaut environ douze centièmes de seconde en temps, et c'est toujours le tourillon de l'est qui est le plus élevé.

	p		p
Janvier 1853	1,5	Juillet 1853	1,3
Février	2,2	Août	0,8
Mars	2,9	Septembre	0,5
Avril (1 au 15)	3,3	Octobre	0,9
Avril (15 au 30)	2,2	Novembre	1,1
Mai	2,0	Décembre	1,7
Juin	2,2	Janvier 1854	2,1

A la seule inspection de ce tableau, on voit que la variation annuelle a lieu d'une manière continue et régulière (les petites anomalies qu'il présente peuvent être attribuées à des causes purement accidentelles); on voit, en outre, et ceci concorde avec les résultats obtenus par M. Henry pour les lunettes méridiennes de Greenwich et de Cambridge, que le *maximum* et le *minimum* de la variation annuelle de l'inclinaison de l'axe ont lieu à peu près vers les équinoxes, et que l'inclinaison observée au moment des solstices approche beaucoup de l'inclinaison moyenne de l'année entière. Je m'en tiens à ces remarques générales. On conçoit qu'une discussion complète exigerait d'autres détails, et plusieurs années d'observations; mais les moyens me manquent, je le répète, pour un travail d'ensemble.

C'est pour contrarier le moins possible la marche naturelle de l'instrument, que je ne l'ai rectifié que trois fois dans tout le courant de l'année 1853, et une fois dans le mois de janvier 1854. J'avais reconnu en effet, par des épreuves antérieures, que, lorsque je relevais un des tourillons, il tendait pendant un certain temps à se relever encore et ne reprenait sa marche naturelle qu'au bout de plusieurs jours. En corrigeant l'inclinaison un plus grand nombre de fois, ce qui n'était nullement nécessaire pour le bon emploi des observations, j'aurais donc modifié sa marche, que je voulais étudier; et, en cherchant ainsi à supprimer une des erreurs de mon instrument, je n'aurais peut-être abouti qu'à diminuer les moyens de corriger cette erreur, dont j'aurais trop souvent troublé la loi.

Je n'ajouterai que quelques mots sur *l'axe optique* de la lunette méridienne de Gambey. Une expérience de dix-huit années avait montré que ses variations étaient peu considérables; j'ai donc pu ne vérifier que rarement sa position, et éviter ainsi le retournement trop fréquent de la lunette. Ce retournement, pour une lunette de la grandeur et de l'importance de celle de Gambey, est peut-être de toutes les opérations d'un observatoire celle qui exige le soin le plus minutieux et l'habitude la plus grande du maniement d'instruments délicats. Aussi, faite par des mains inhabiles, peut-elle donner naissance, par les chocs qu'éprouve la lunette, à des erreurs plus graves que celle que l'on voulait déterminer, et même être cause que les fils déliés qui composent le réticule soient brisés ou tordus; malheur si grand, a dit Bessel, que l'observatoire entier doit alors prendre le deuil.

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. F. Woepcke, *intitulé :* Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles, d'après les indications tirées d'un manuscrit arabe [*].

(Commissaires, MM. Lamé, Chasles rapporteur.)

Le travail dont nous avons à rendre compte se rapporte, tout à la fois, à l'histoire des sciences chez les Grecs et chez les Arabes. A ce double titre, il nous a paru mériter l'attention de l'Académie, surtout dans un moment où, par des révélations inattendues sur l'astronomie égyptienne à des époques reculées, l'illustre doyen de cette Académie a donné un nouvel attrait et une nouvelle impulsion à ces recherches qui nous dévoilent les sources antiques de nos sciences mathématiques et de la civilisation moderne [**].

L'ouvrage de M. Woepcke contient, outre l'*Essai de restitution des travaux d'Apollonius sur les quantités irrationnelles*, qui en est l'objet principal, plusieurs autres parties qu'il eût été difficile d'indiquer sous un seul titre. Nous en ferons, dès le début, l'énumération, pour donner une idée de l'ensemble de ce travail. Voici donc les paragraphes principaux que l'on y distingue :

1°. Notice historique sur les ouvrages d'Apollonius et sur un commentaire inédit du Xe livre d'Euclide, composé par un auteur grec nommé Valens, et retrouvé dans un texte arabe;

[*] Voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXXVII, page 553 ; séance du 17 octobre 1853.

[**] *Ibid.*, tome XXXVI, page 245, et tome XXXVII, page 257 ; séances des 7 février et 16 août 1853.

2°. Analyse de ce X^e livre d'Euclide, qui traite des quantités irrationnelles;

3°. Texte arabe des passages du commentaire de Valens relatifs aux travaux d'Apollonius, avec la traduction et l'éclaircissement de ces passages;

4°. Essai d'une restitution conjecturale des travaux d'Apollonius sur les irrationnelles;

5°. Analyse des deux livres du commentaire de Valens.

Le Ier paragraphe présente un aperçu des divers ouvrages d'Apollonius. Ils se rapportent principalement, comme on sait, à la géométrie, mais non exclusivement, car un fragment du IIe livre des *Collections mathématiques* de Pappus, découvert et publié par Wallis, roule sur des spéculations arithmétiques du grand géomètre de Perge. Le commentaire grec sur le Xe livre d'Euclide, dont M. Woepcke a trouvé une traduction arabe, fait mention de recherches arithmétiques d'un plus haut intérêt, car elles traitent de la théorie des quantités irrationnelles et sont une extension des propositions d'Euclide.

Cette traduction a été faite vers la fin du xe siècle (l'an 358 de l'hégire), par Aboû Othmân le Damascène. La copie qui existe dans le Ms. n° 952. 2. *Supplément arabe* de la Bibliothèque impériale, est de la main d'un géomètre arabe renommé, Ahmed ben Mohammed ben Aldjalîl Alsidjzî, dont M. Woepcke a mis au jour un opuscule sur la trisection de l'angle, à la suite du texte et de la traduction qu'il a publiés de l'*Algèbre* d'Omar Alkhayyâmî, qui traite de la résolution des équations cubiques par les constructions géométriques [*].

Cette circonstance, que la copie de l'ouvrage découvert par M. Woepcke a été faite par un géomètre en renom, est propre à accroître la curiosité qui s'attache naturellement à ce fragment émané d'un auteur grec.

Il était important de connaître le nom et l'époque de cet auteur. Le nom est indiqué dans le Ms., mais incomplétement et peu sûre-

---

[*] *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits*, par F. Woepcke, docteur agrégé à l'Université de Bonn, membre de la Société asiatique de Paris. *Paris*, 1851; grand in-8°.

ment, à raison du mode de transcription arabe; toutefois, M. Woepcke pense qu'il faut lire, très-probablement, *Valens*.

C'est par le rapprochement et la comparaison de divers textes, extraits d'autres Mss. arabes, et de plusieurs passages de la biographie des auteurs arabes, rapportés par Casiri dans sa *Bibliothèque de l'Escurial*, qu'il est induit à adopter ce nom. Quant à l'époque où aurait vécu ce géomètre, les documents historiques consultés à diverses sources n'ont fourni à M. Woepcke aucune donnée qui pût lui permettre de la fixer, et il se borne à émettre la conjecture que cet auteur peut être l'astrologue Vettius Valens, qui vivait au temps de Constantin, et auquel Fabricius a consacré une Notice assez étendue dans sa *Bibliothèque grecque*.

Le Xe livre des Éléments d'Euclide est celui qui, dans tous les temps, a présenté le plus de difficultés; tellement qu'au moyen âge et à la renaissance, il était regardé comme la croix des mathématiciens [*]. Chez les Modernes, il a cessé de faire partie des Éléments de géométrie, parce qu'en effet, d'une part, les nombreuses propositions d'Euclide sur la commensurabilité et l'incommensurabilité et sur les propriétés des lignes rationnelles et des irrationnelles, ne se rapportent point aux lignes seulement, mais aux grandeurs en général, et à cette partie des mathématiques qu'on appelle la *Théorie des nombres*; et d'une autre part, que les notations algébriques modernes font disparaître les difficultés qui se rencontrent dans les démonstrations géométriques appliquées à ce genre de propositions. On en jugera par l'identité

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b,$$

qui, sous cette forme algébrique, est évidente, mais dont la démonstration géométrique demande des développements préliminaires et une attention soutenue qui n'est pas sans difficultés.

---

[*] « La difficulté du Xe livre d'Euclide est à plusieurs devenue en horreur, voire » jusqu'à l'appeler la croix des mathématiciens, matière trop dure à digérer, et en » laquelle n'aperçoivent aucune utilité. » (STEVIN, Ier livre d'Arithmétique; définition XXI.)

On conçoit donc que depuis longtemps, chez les Modernes, on ait pu regarder l'étude de ce X^e livre d'Euclide comme un travail oiseux et pénible, et qu'on s'en soit affranchi. Cependant il est indispensable que nous présentions ici une analyse précise de cet ouvrage, puisqu'il forme la base de toutes les parties de celui dont nous avons à rendre compte. Nous suivrons religieusement les traces de l'auteur, parce que l'enchaînement et l'ordre parfait qu'il a observé dans le développement de ses nombreuses propositions, forme le caractère de sa méthode, dont on perdrait le fil, et qu'on ne connaîtrait pas, si l'on s'écartait un instant de la voie qu'il a suivie invariablement, et où se décèlent le génie et la pénétration du grand géomètre.

Il nous faut d'abord rappeler quelques définitions propres à ce X^e livre; en premier lieu, celle du mot *irrationnel*, qui a un sens différent de celui que nous lui attribuons maintenant; puis diverses expressions tombées aujourd'hui en desuétude ou même généralement inconnues.

Euclide suppose qu'on a pris une première droite, à laquelle toutes les autres sont comparées par voie de rapport ou de commune mesure; et cette droite est dite *rationnelle*. (Définition cinquième.) Ensuite, il regarde comme *rationnelles* toutes droites *commensurables* à celles-là, soit en *longueur*, soit en *puissance*, c'est-à-dire toutes droites qui ont une commune mesure avec celles-là, ou dont les carrés ont eux-mêmes une commune mesure avec le carré de cette première. (Définition sixième.) Cette définition des lignes *rationnelles* est beaucoup plus étendue que la définition actuelle. Par exemple, la diagonale d'un carré dont le côté est pris pour *rationnelle* est elle-même *rationnelle*, dans le sens d'Euclide, parce que son carré est commensurable avec celui du côté, tandis que dans l'acception moderne cette diagonale est essentiellement *irrationnelle*.

Euclide a eu sans doute quelque raison pour rattacher ainsi, par une acception très-étendue du mot *rationnel*, les deux cas de la *commensurabilité en longueur*, et de la *commensurabilité en puissance*, qui paraissent naturellement si différents, et auxquels, néanmoins, il attribue ainsi le même degré d'importance. Malheureusement, il ne donne, à ce sujet, aucune explication. On ne trouve non plus aucune lumière, sur ce point, dans la partie du commentaire grec analysée

par M. Woepcke. Qu'on nous permette ici un rapprochement, quelque étrange et inattendu qu'il puisse paraître, entre une théorie physico-mathématique moderne et cette doctrine d'Euclide. M. Lamé, dans ses leçons sur l'élasticité à la Faculté des Sciences [*], a eu à considérer avec le même degré d'importance, dans le classement des phénomènes vibratoires d'une membrane rectangulaire, les deux cas de la *commensurabilité* et de l'*incommensurabilité en puissance* des deux côtés de la membrane. Or on sait que la théorie des tons musicaux était fort cultivée dans l'école de Pythagore, comme au temps d'Archytas et d'Euclide, et qu'elle se rattachait intimement à l'*arithmétique spéculative*, science distincte de l'arithmétique pratique, et qui formait la *théorie des nombres* de l'époque. Paraîtrait-il hors de toute probabilité qu'Euclide eût puisé dans des considérations tenant à cette théorie musicale tout arithmétique, soit la cause de l'égale importance qu'il donne aux deux cas de la *commensurabilité en longueur* et de la *commensurabilité en puissance*, soit celle, directement, de sa définition étendue de la *rationalité*.

Mais revenons à notre sujet, aux définitions d'Euclide.

Euclide appelle *irrationnelle* toute ligne *incommensurable en puissance* à la ligne prise pour terme de comparaison, c'est-à-dire toute ligne dont le carré n'a pas de commune mesure avec le carré de celle-ci (définition 7).

Parmi les *irrationnelles*, il en distingue une formée par voie de proportion, à laquelle il donne le nom de *médiale;* c'est une ligne dont le carré est égal au rectangle de deux lignes rationnelles *commensurables en puissance seulement* (proposition 22). L'expression de cette ligne est de la forme $x = \sqrt{a}\sqrt[4]{b}$, puisqu'on aura $x^2 = a.\sqrt{b}$; a et $\sqrt{b}$ représentant deux lignes commensurables en puissance seulement.

Euclide applique aux surfaces ces mêmes définitions. Il appelle *rationnel* le carré de la ligne prise pour terme de comparaison (définition 8), *surfaces rationnelles* toutes les surfaces *commensurables à ce carré* (définition 9), et *irrationnelles*, toutes les surfaces incommen-

[*] *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides;* Paris, 1852. *Voir* pages 122 et 130.

surables à ce même carré (définition 10). Parmi les surfaces irrationnelles, il en distingue une qu'il appelle *espace médial* : c'est le rectangle construit sur deux lignes *médiales, commensurables en longueur* (proposition 25), lequel a pour expression $a^2 n' \sqrt{n}$ ou simplement $\sqrt{n}$. Car les deux médiales, *commensurables en longueur*, seront $a\sqrt{n}$ et $n'.a\sqrt[4]{n}$; et leur produit $a^2 n' \sqrt{n}$.

Après la *médiale*, Euclide considère les irrationnelles formées de deux lignes, par voie d'addition ou de soustraction, lesquelles sont au nombre de douze, dont six formées par addition et six par soustraction. Ces douze irrationnelles et la médiale sont l'objet du Xe livre des Éléments. L'auteur y donne leur construction et leurs propriétés.

Ce X^e^ livre contient cent dix-sept propositions, dont trente-six peuvent être regardées comme des préliminaires nécessaires pour entreprendre la théorie des douze irrationnelles par addition et soustraction. Voici le sujet de ces trente-six propositions : Les vingt-deux premières sont relatives à la commensurabilité et à l'incommensurabilité des droites en *longueur*, et des grandeurs en général. Les propositions 23 à 27 se rapportent aux lignes *rationnelles* et aux *médiales*; on y traite de leur commensurabilité en longueur et en puissance. Dans les propositions 28 à 33, on construit deux rationnelles ou deux médiales, *commensurables en puissance seulement*, et dont le rectangle satisfait à quelque condition. Enfin, dans les trois propositions suivantes (34, 35 et 36), on construit deux droites *commensurables en puissance*, dont la *somme des carrés* et le *rectangle* forment des surfaces *rationnelles* ou *médiales*; puis commence, à la proposition 37, la théorie de douze irrationnelles.

Ces irrationnelles sont formées, avons-nous dit, par addition ou soustraction de deux lignes. On conçoit que ces deux lignes ne peuvent être commensurables en longueur, car leur somme ou leur différence donnerait une simple ligne monôme de même nature qu'elles-mêmes. Il faut donc prendre deux lignes *incommensurables en longueur*. Euclide distingue, à l'égard des carrés ou puissances de ces lignes, le cas de *commensurabilité* et celui d'*incommensurabilité*.

Dans le premier cas, il prend deux lignes *rationnelles* ou *médiales*. Ces lignes devant être *commensurables en puissance*, on reconnaît

immédiatement qu'elles sont nécessairement toutes deux rationnelles, ou toutes deux médiales, et que leur rectangle est rationnel ou médial.

De là dérivent trois irrationnelles, formées :

La première, de deux lignes rationnelles dont le rectangle est médial;

La deuxième, de deux lignes médiales ayant un rectangle rationnel;

Et la troisième, de deux lignes médiales ayant un rectangle médial.

Dans le deuxième cas, celui où les deux lignes sont *incommensurables en puissance*, Euclide ne leur assigne point, comme dans le cas de la commensurabilité, une qualité déterminée et restreinte, comme d'être nécessairement *rationnelles* ou *médiales;* il a recours à d'autres conditions, lesquelles concernent le rectangle des deux lignes et la somme de leurs carrés; il demande que chacune de ces surfaces soit *rationnelle* ou *médiale*.

Ces conditions donnent lieu aux trois combinaisons :

1°. Somme rationnelle et rectangle médial;

2°. Somme médiale et rectangle rationnel;

3°. Somme médiale et rectangle médial.

Les couples de lignes déterminées dans ces trois systèmes forment trois nouvelles irrationnelles.

On voit, d'après ces considérations, que les six irrationnelles, soit par addition, soit par soustraction, sont rangées en deux groupes qui ont un caractère différent.

Les trois premières sont formées de deux lignes *rationnelles* ou *médiales, commensurables en puissance;* et il n'y a point d'autre condition pour les déterminer : les trois autres sont formées de deux lignes *incommensurables en puissance*, et elles sont déterminées par deux conditions concernant la somme de leurs carrés et leur rectangle.

Euclide construit les six lignes par addition, et démontre leur irrationalité dans six propositions (37-42); puis il démontre dans les six propositions suivantes (43-48) que chacune de ces lignes ne peut être divisée qu'en un seul point, de manière que les deux parties soient deux lignes satisfaisant aux conditions de construction de l'irrationnelle; fort belle proposition pour l'époque, puisqu'elle répond, à l'égard, par exemple, de la première des six irrationnelles, à cette

propriété des quantités radicales, savoir, que l'on ne peut avoir $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a'} + \sqrt{b'}$.

Parlons ici de la terminologie adoptée par Euclide.

En général, quand une ligne est formée par l'addition de deux lignes *rationnelles, commensurables en puissance seulement*, Euclide appelle celles-ci *noms*, et la ligne égale à leur somme, *ligne de deux noms*. Des traducteurs ont dit simplement *ligne binôme* ou *binomiale* : et telle paraît être l'origine, chez les Modernes, de l'expression *binôme*.

La première des six irrationnelles par addition est donc appelée *ligne de deux noms*. Les deux autres irrationnelles du premier groupe sont dites *première de deux médiales* et *seconde de deux médiales*. Les trois du second groupe s'appellent la *majeure; celle qui peut une rationnelle et une médiale*, et *celle qui peut deux médiales*. Nous parlerons plus loin des six irrationnelles par soustraction.

Les *lignes de deux noms* jouent un rôle principal dans cette théorie, et Euclide en distingue six espèces.

Ces lignes étant formées par addition de deux lignes rationnelles, telles que n et $\sqrt{n}$, il semblerait, au premier abord, qu'il ne dût y avoir que deux lignes rationnelles de ce genre, l'une de la forme $n + \sqrt{n}$, et l'autre $\sqrt{n} + \sqrt{n'}$. Cependant Euclide en distingue six espèces différentes, qu'il appelle *première ligne de deux noms, deuxième ligne de deux noms*, etc.

La distinction de ces six irrationnelles de deux noms dérive de la considération suivante. Si l'on forme le rapport de la racine carrée de la différence des carrés des deux termes du binôme irrationnel, au plus grand des deux, ce rapport est nécessairement de la forme n ou $\sqrt{n}$; et ce sont ces deux cas qu'Euclide considère. Ainsi, soient A et B les deux termes ou *noms* d'une *ligne de deux noms*, le rapport dont il s'agit sera $\frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}$, en supposant $A > B$, et ce rapport sera de la forme n ou $\sqrt{n}$. Or A devant toujours être plus grand que B, et ces deux lignes étant elles-mêmes de la forme n ou $\sqrt{n}$, on voit que le binôme $A + B$ aura, dans chacun des deux cas relatifs au rapport en question, les

trois formes suivantes :

$$a + \sqrt{b}, \quad \sqrt{a} + b, \quad \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

De là dérivent les six espèces de *lignes de deux noms*.

Après avoir fait cette distinction dans six définitions, Euclide construit les six lignes de deux noms (propositions 49-54) et démontre une propriété importante des six irrationnelles formant les deux groupes définis ci-dessus, savoir, que « la moyenne proportionnelle entre une » ligne rationnelle et une droite de deux noms est une des six irration- » nelles (propositions 55-60); » et réciproquement, que « chacune des » six irrationnelles est toujours la moyenne proportionnelle entre une » rationnelle et une ligne de deux noms (propositions 61-66); » en d'autres termes, et en nous rapprochant du style moderne, chacune des six irrationnelles est la racine carrée d'un binôme dont chacun des deux termes est une surface *rationnelle* ou *médiale*, c'est-à-dire de la forme n ou $\sqrt{n}$.

Cette belle propriété jette un grand jour sur toute la théorie des irrationnelles du Xe livre d'Euclide; car cette théorie se trouve renfermée dans l'expression de la racine carrée du binôme A + B que voici :

$$\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} = \sqrt{A + B}.$$

Les deux termes du premier membre sont les deux lignes dont la somme forme une irrationnelle; et les six irrationnelles distinguées par Euclide répondent aux six cas que présente le rapport $\frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}$, selon qu'il est de la forme n ou $\sqrt{n}$, comme nous l'avons dit.

Euclide démontre qu'une droite commensurable en longueur avec une des six irrationnelles est elle-même une irrationnelle de même espèce (propositions 67-71). Puis, que la racine carrée du binôme A + B dans lequel A et B sont deux surfaces, *l'une rationnelle et l'autre médiale*, ou *toutes deux médiales*, est une des six lignes irrationnelles (propositions 72-73). En analyse, cette proposition ne diffère pas de celles qui expriment que la moyenne proportionnelle entre une rationnelle et une ligne de deux noms est une des six irrationnelles (propo-

sitions 55-60); mais en géométrie, et dans l'état de séparation absolue où se trouvaient ces deux branches des mathématiques, Euclide devait ainsi marcher pas à pas, sans s'écarter de la rigueur qui fait le caractère de la science grecque; et l'on reconnaît qu'il n'y a rien d'inutile dans les trente-sept propositions (37-73) qu'il a consacrées à la construction et à la démonstration des propriétés de ses six irrationnelles par addition.

Il suit la même marche et démontre les mêmes propriétés pour les six irrationnelles par soustraction (propositions 74-111).

Celles-ci se rangent en deux groupes, comme les premières. Les trois irrationnelles du premier groupe sont formées de deux rationnelles ou de deux médiales, *commensurables en puissance seulement;* et les trois du second groupe, de deux lignes *incommensurables en puissance,* déterminées par deux conditions, savoir : que *la somme de leurs carrés* et *leur rectangle* soient deux surfaces *rationnelles* ou *médiales.*

La première irrationnelle du premier groupe, formée de deux rationnelles *commensurables en puissance seulement,* qui correspond à la *ligne de deux noms* dans les irrationnelles par addition, s'appelle *apotome* ou *résidu.* Euclide distingue six *apotomes,* qu'il dénomme *premier, deuxième,* etc., par les mêmes considérations qui l'ont conduit à distinguer six *lignes de deux noms.*

Les six irrationnelles par soustraction sont, en employant ici le style moderne, les racines carrées des six apotomes (propositions 98-103).

Euclide complète cette théorie en démontrant qu'un apotome n'est pas une ligne de deux noms (proposition 112). Et de là il conclut que ses douze irrationnelles binômes, avec la médiale, forment treize lignes d'espèces différentes. Puis, on trouve trois propositions (propositions 113-115), que nous exprimons par l'identité

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(a-b).$$

Dans une autre, Euclide montre qu'il existe des irrationnelles d'un ordre supérieur à la médiale, en nombre infini; ce sont les irrationnelles telles que $\sqrt[p]{a}$ (proposition 116).

Enfin, la cent dix-septième proposition, la dernière du livre, a pour

objet de démontrer que la diagonale du carré est incommensurable en longueur avec le côté.

Passons au commentaire de l'auteur grec.

Commentaire de Valens.

M. Woepcke a réparti dans deux sections distinctes l'analyse de ce commentaire, retrouvé, comme nous l'avons dit, dans une traduction arabe. Dans l'une de ces sections, qui forme les §§ 10, 11, 12 et 13 de son Mémoire et qui fait suite immédiatement à une analyse sommaire du Xe livre d'Euclide, il a réuni tous les passages relatifs à la généralisation des propositions de ce X^e^ livre, attribuée à Apollonius par l'auteur grec; et, dans l'autre, formée des §§ 19 et 20 qui terminent son travail, il donne une analyse ou table sommaire des diverses matières contenues dans tout l'ouvrage grec.

Nous parlerons tout de suite ici de cette dernière partie qui fait connaître en peu de mots la nature et en quelque sorte la physionomie de l'ouvrage, et nous consacrerons les dernières pages de notre Rapport à l'exposé de cette généralisation des propositions d'Euclide, qui a fait le sujet des recherches d'Apollonius, et qui est l'objet principal du travail étendu de M. Woepcke.

L'ouvrage de Valens est en deux livres.

On trouve dans le premier une esquisse historique des développements successifs de la théorie des quantités irrationnelles chez les Grecs depuis Pythagore. L'auteur se livre ensuite à des considérations métaphysiques sur les quantités *continue* et *discontinue*, sur la *commensurabilité* et l'*incommensurabilité*, sur les quantités *rationnelles* et *irrationnelles*. Il parle des travaux de Thétète sur la théorie des irrationnelles, antérieurs à ceux d'Euclide; discute plusieurs passages de Platon relatifs à cette théorie, et compare les idées de ce philosophe aux principes d'Euclide.

Le second livre est plus mathématique et forme un commentaire du Xe livre d'Euclide. Mais M. Woepcke, craignant de donner trop d'extension à son Mémoire, a dû restreindre cette partie de son travail à l'indication succincte des propositions ajoutées à la théorie d'Euclide et des divers sujets sur lesquels l'auteur a disserté.

Plusieurs passages de cette analyse peuvent faire espérer que l'historien trouverait dans l'ouvrage même quelques détails intéressants sur l'état des mathématiques grecques, dont la connaissance nous laisse tant à désirer. De pareils textes anciens sont toujours précieux, d'autant plus qu'ils deviennent chaque jour plus rares; il est donc à désirer que les savants les recueillent avec soin et les mettent, par la voie de l'impression, à l'abri des chances de destruction, qui est leur sort inévitable dans un laps de temps plus ou moins long. Nous exprimerions de vifs regrets que M. Woepcke, dont le zèle et le talent comme orientaliste et mathématicien sont parfaitement à la hauteur d'une tâche difficile et laborieuse, ne nous eût pas fait connaître intégralement cet ouvrage grec, resté jusqu'ici ignoré dans un texte arabe, si nous ne concevions naturellement que la crainte des difficultés que pourrait rencontrer l'impression d'un tel ouvrage a dû le retenir dans ses propres désirs de compléter son travail, quelque attrait que lui offrît ce fragment de l'antiquité grecque.

Passages du commentaire grec, relatifs aux travaux d'Apollonius sur la théorie des quantités irrationnelles.

Le commentateur Valens, après avoir dit que cette théorie prit naissance dans l'école de Pythagore, qu'elle dut des accroissements à Thétète l'Athénien dont Platon donne le nom à l'un de ses livres, ajoute que « le grand Apollonius, dont le génie atteignit au plus haut degré » de supériorité dans les mathématiques, enrichit cette matière d'ad- » mirables théories, après bien des efforts et des travaux. »

« Euclide, continue le commentateur, établit des règles relativement » à la commensurabilité et à l'incommensurabilité, en général; pré- » cisa les définitions et les distinctions des quantités rationnelles et » irrationnelles; exposa un grand nombre d'ordres des quantités irra- » tionnelles, et démontra clairement toute leur étendue.

» Apollonius distingua les espèces des *irrationnelles ordonnées*, et » découvrit la science des quantités appelées *irrationnelles inordon-* » *nées*, dont il produisit un grand nombre par des méthodes exactes. »

Que faut-il entendre ici par ces expressions, *irrationnelles ordonnées* et *irrationnelles inordonnées?* L'auteur grec n'en donne aucune défi-

nition; seulement, plus loin, il entre dans une courte explication, assez obscure, dont nous reparlerons après avoir fait connaître ce qui se rapporte à ces irrationnelles et comment on les forme.

On peut concevoir plusieurs manières de généraliser la théorie d'Euclide : soit en formant les irrationnelles, de plusieurs lignes, au lieu de deux; soit en changeant la nature ou la forme des deux lignes composantes, en prenant, par exemple $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$, au lieu de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

C'est le premier mode de généralisation qu'Apollonius s'est proposé; et ce n'est que par voie d'*addition* qu'il a formé ses irrationnelles polynômes, composées de trois lignes, ou plus en nombre indéfini. Ce que l'auteur grec dit des irrationnelles par *soustraction* est fort restreint, et l'on n'y voit toujours que des irrationnelles binômes. Parlons d'abord des irrationnelles par addition.

L'auteur dit que trois lignes *rationnelles, commensurables en puissance seulement,* forment une *irrationnelle* qu'on appelle la *ligne de trois noms,* et que la démonstration de l'irrationalité est exactement la même que pour le cas de deux lignes.

Toutefois, M. Woepcke remarque que le raisonnement sur lequel repose cette démonstration n'est pas absolument rigoureux.

L'auteur ajoute : « On peut de même construire la *première* et la » *seconde de trois médiales.* Puis la *majeure,* composée de trois lignes » *incommensurables en puissance,* telles que l'une d'elles donne avec » chacune des deux autres une *somme de carrés rationnelle,* tandis » que le *rectangle* de celles-ci est *médial.* D'une manière analogue, on » obtient la droite *qui peut une rationnelle et une médiale* : et de même » celle *qui peut deux médiales.* »

On trouve dans cette énumération des six irrationnelles trinômes, les conditions de construction de la première, appelée la *ligne de trois noms,* et des trois dernières; et il n'est rien dit encore de la construction des deux autres irrationnelles, qui sont la *première* et la *seconde de trois médiales.* Mais plus loin, après avoir reproduit le mode de construction de la ligne de trois noms, formée de trois rationnelles commensurables en puissance seulement, l'auteur ajoute : « Qu'on ait » trois lignes *médiales, commensurables en puissance* et *dont l'une*

» *comprenne avec chacune des deux autres un rectangle rationnel;* » le carré de la somme de ces trois lignes est irrationnel. » Puis, après un court raisonnement, en forme de démonstration de cette proposition, il dit : « Le reste des autres lignes se trouve dans les mêmes cir- » constances. »

Voilà les seuls passages du commentaire grec sur les irrationnelles formées par l'addition de trois lignes. On y voit que ces irrationnelles sont rangées en deux groupes, à l'instar des irrationnelles binômes d'Euclide. Les trois premières sont formées de trois lignes *commensurables en puissance;* et les trois autres, de trois lignes *incommensurables en puissance.*

Cependant il se présente une difficulté, au sujet des deux irrationnelles du premier groupe formées de *trois médiales.* On conçoit bien, par analogie avec les irrationnelles d'Euclide, que le texte, énonçant la condition du *rectangle rationnel*, s'applique à la *première de trois médiales,* et que pour la *seconde de trois médiales* le rectangle devra être *médial.* Alors, il s'agira de *trouver trois lignes médiales, commensurables en puissance, dont l'une comprenne avec chacune des deux autres un rectangle médial;* la somme des trois lignes formera la *seconde de trois médiales.*

Pour ce cas, il n'y a lieu à aucune incertitude, et l'on satisfait aux conditions de la question en prenant pour les trois médiales, comme le fait M. Woepcke, les expressions suivantes :

$$x = \sqrt[4]{ac}, \quad y = \sqrt[4]{\frac{c}{a}}, \quad z = \sqrt[4]{\frac{c}{ab^2}}.$$

Mais pour le cas du *rectangle rationnel,* qui répond à la *première de trois médiales*, les conditions indiquées sont incompatibles, du moins en suivant le sens naturel que l'habile traducteur a donné au texte arabe. Car si l'une des trois médiales x forme avec chacune des deux autres, y et z, un rectangle rationnel, de sorte qu'on ait $xy = m$ et $xz = n$, il s'ensuit que le rapport de celles-ci, $\frac{y}{z}$, s'exprime par un nombre $\frac{m}{n}$, et qu'ainsi ces deux lignes sont commensurables en longueur, quand elles devraient ne l'être qu'en puissance. M. Woepcke

conclut de là que le texte peut avoir été altéré, et propose de le rectifier en disant : qu'on ait *trois lignes médiales, dont l'une soit commensurable en puissance avec chacune des deux autres, et comprenne avec chacune de celles-ci un rectangle rationnel.* On satisfait à la question en prenant pour les trois médiales,

$$x = \sqrt{b\sqrt{a}}, \quad y = \sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}, \quad z = p \cdot \sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}.$$

Il faudrait donc deux règles différentes pour la construction des deux lignes formées de trois médiales, tandis que l'auteur n'en donne qu'une pour les deux cas.

On est induit naturellement à rechercher s'il n'est pas possible de donner au texte un autre sens qui permette de conserver un seul énoncé. Or il semble que cela soit facile, car il suffit d'entendre que l'auteur, en demandant trois *médiales, commensurables en puissance,* n'a pas voulu dire *en puissance seulement* Alors, on résout la question par les expressions mêmes qui satisfont à l'énoncé modifié par M. Woepcke.

Le texte relatif aux irrationnelles du deuxième groupe. formées chacune de trois lignes *incommensurables en puissance,* paraît suffisamment clair : l'auteur demande pour la première des trois irrationnelles, appelée la *majeure,* que l'une des trois lignes forme avec chacune des deux autres une *somme de carrés rationnelle,* et que le *rectangle* des deux lignes (c'est-à-dire de celles-ci) soit *médial.* Il ajoute que, d'une manière analogue, on obtient la droite *qui peut une rationnelle et une médiale ;* et de même celle *qui peut deux médiales.* On conçoit, par analogie avec les irrationnelles du deuxième groupe d'Euclide, que cela signifie que, pour la droite *qui peut une rationnelle et une médiale,* les *sommes de carrés* seront *médiales,* et le *rectangle rationnel ;* et que, pour la droite *qui peut deux médiales,* les *sommes de carrés* seront *médiales* et le *rectangle* aussi *médial.*

Pour la *majeure,* les trois lignes composantes x, y, z satisfont aux conditions exprimées par les équations

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^2 + z^2 = b, \quad yz = \sqrt{c}.$$

M. Woepcke, en posant ces formules, donne les expressions des trois lignes.

On reconnaît aisément qu'on pourrait construire les deux autres irrationnelles avec ces mêmes formules; qu'il suffit d'y remplacer a et b par $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, en conservant $\sqrt{c}$ pour la ligne *qui peut deux médiales*, et en changeant $\sqrt{c}$ en c pour celle *qui peut une rationnelle et une médiale*.

Cependant, pour ces deux lignes, M. Woepcke s'écarte de l'interprétation naturelle du texte. Il remplace le rectangle yz par xy; et il obtient des expressions différentes des trois lignes x, y, z.

On forme toujours ainsi des irrationnelles à trois termes; mais cette manière, dont l'application aux irrationnelles d'un plus grand nombre de termes, peut offrir quelques facilités, a-t-elle bien été dans l'intention de l'auteur grec; devons-nous croire qu'il ait poussé ses recherches au delà des irrationnelles trinômes, et éprouvé le besoin de formules plus susceptibles de généralisation, que celles qui semblent répondre au sens naturel du texte arabe?

Nous n'avons parlé jusqu'ici que des irrationnelles par addition. Ce que l'auteur dit des irrationnelles par soustraction se réduit à très-peu de chose, et il ne considère que des irrationnelles binômes. « Quand on a formé l'*apotome*, dit-il, qui est la différence de deux » droites rationnelles commensurables en puissance seulement, si de » la droite retranchée, appelée par Euclide la *congruente*, on re- » tranche une rationnelle commensurable en puissance seulement » avec elle, on obtient encore un apotome; et de même, si de la » ligne retranchée dans cet apotome, on retranche une rationnelle » commensurable en puissance seulement avec elle, le reste est en- » core un apotome. Il en est de même pour la soustraction des autres » lignes. »

Ainsi l'auteur ne forme pas d'irrationnelles polynômes où entre le signe *moins*. On peut penser que cette question avait offert des difficultés qui auront arrêté Apollonius et les autres géomètres après lui.

Nous avons dit que les irrationnelles considérées par Euclide s'appelaient *irrationnelles ordonnées*, et celles d'Apollonius *irrationnelles inordonnées*.

On lit dans le commentaire grec, que « les *irrationnelles ordonnées,* » lesquelles forment le sujet limité d'une science et se réduisent aux » treize d'Euclide, sont aux *inordonnées,* comme les *rationnelles* sont » aux *irrationnelles ordonnées*. Que les *inordonnées* sont formées des » *ordonnées* au moyen de la proportion, de l'addition et de la sous- » traction. »

Ce peu de mots ne peut donner une idée de ce qu'il faut entendre par *irrationnelles inordonnées*. Mais on trouve dans une préface ou introduction aux *Données* d'Euclide, par Marinus, le disciple et le successeur de Proclus dans l'école platonicienne d'Athènes, au ve siècle, une explication de ces mots *ordonné* et *inordonné*. On y lit :

Ordonné, ce qui est complétement déterminé et ne peut se faire de diverses façons, comme une droite menée par deux points. *Inordonné,* ce qui n'est pas déterminé complétement et peut se faire de diverses façons, comme un angle passant par deux points.

Comment faut-il appliquer ces définitions précises aux irrationnelles binômes d'Euclide et aux irrationnelles trinômes d'Apollonius?

On voit bien que la première, celle de l'*ordonné,* convient aux irrationnelles binômes, en ce qu'elle peut s'appliquer à cette belle proposition d'Euclide, savoir qu'une irrationnelle donnée ne peut être divisée qu'en un seul point de manière que ses deux segments forment deux lignes satisfaisant aux conditions de construction de l'irrationnelle; ce qui répond, comme nous l'avons dit, à l'égard, par exemple, de la *ligne de deux noms,* à cette proposition arithmétique, que l'on ne peut avoir $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a'} + \sqrt{b'}$.

On peut donc dire, conformément à la définition de Marinus, que les irrationnelles d'Euclide sont *ordonnées*. Les Anciens auraient-ils pensé que les irrationnelles polynômes n'offraient pas le même caractère, et, par exemple, qu'une ligne de trois noms $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, pût être composée de trois autres rationnelles différentes, et être égale à $\sqrt{a'} + \sqrt{b'} + \sqrt{c'}$? Ce qui ne serait pas exact.

Le chapitre dans lequel M. Woepcke a émis ses vues, au sujet de la divination des propositions sur les irrationnelles polynômes qui ont pu faire partie de l'ouvrage d'Apollonius, contient six propositions générales correspondantes aux six irrationnelles d'Euclide par addition,

lesquelles expriment qu'une somme de lignes, déterminées d'après certaines conditions, forme une ligne *irrationnelle*. Ces propositions sont la généralisation de celles qui, dans le commentaire grec, sont relatives aux irrationnelles trinômes comme nous l'avons vu. M. Woepcke, en énonçant ces propositions générales, ne veut pas dire qu'elles aient été formulées par Apollonius, dans cet état de généralité qui rentre dans l'esprit de l'analyse moderne, mais seulement qu'elles forment une généralisation des irrationnelles trinômes décrites dans le texte arabe, et qu'elles complètent cette théorie.

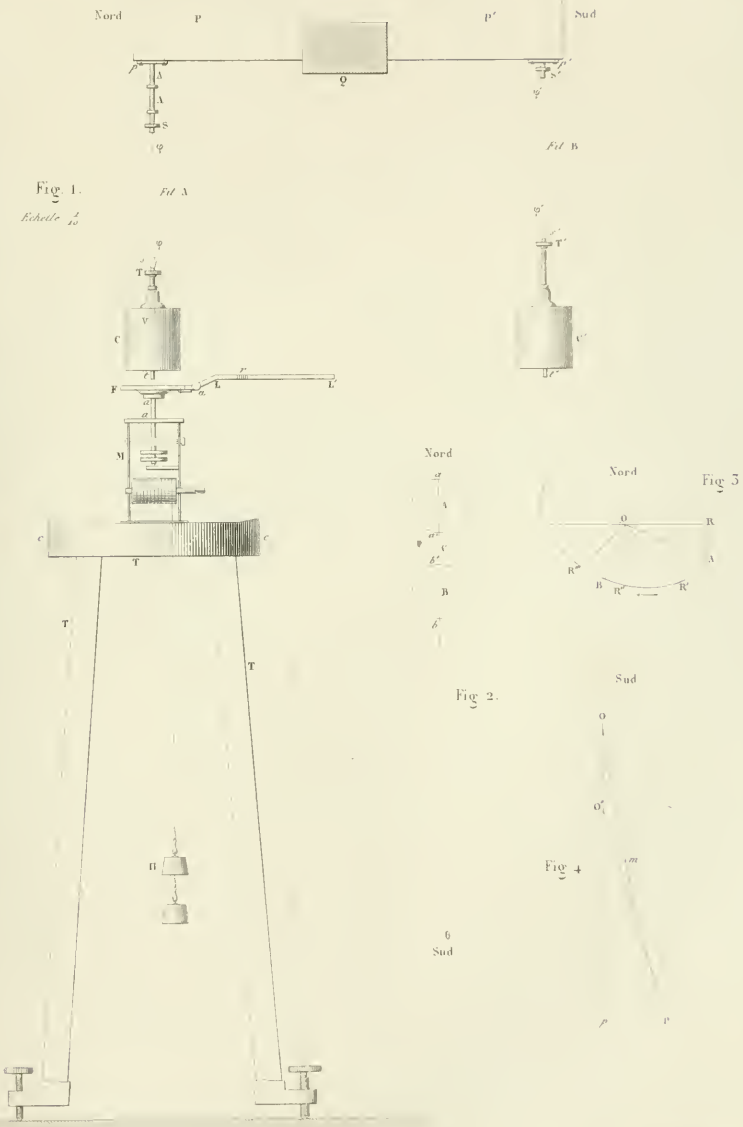
Nous avons essayé, dans ce Rapport auquel la nature du sujet, devenu si étranger à nos théories mathématiques actuelles, a donné une étendue inaccoutumée, de faire connaître les parties principales de l'ouvrage de M. Woepcke. Nous pensons que cet ouvrage offrira de l'intérêt aux érudits qui cherchent et aiment à retrouver des traces de la culture des sciences dans l'antiquité et l'esprit des méthodes qui, sous des formes parfois très-différentes, ont été la préparation et l'origine de nos méthodes modernes. On saura d'autant plus de gré à M. Woepcke d'avoir mis ses connaissances dans la littérature arabe au service des sciences mathématiques, pour tirer de l'oubli ce fragment de l'école grecque, qu'il lui a fallu beaucoup de zèle et de persévérance pour accomplir ce travail ardu, sur des matières qui ne sont plus cultivées et qui présentaient plusieurs sortes de difficultés. Aussi ce travail nous paraît mériter les encouragements de l'Académie, et nous pensons qu'il y a lieu de le mettre au jour. Nous avons l'honneur de proposer, en conséquence, à l'Académie, d'en voter l'impression dans le *Recueil des Savants étrangers*.

(Les conclusions de ce Rapport ont été adoptées.)

FIN DU DIX-NEUVIÈME VOLUME.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

Mémoire sur le Pendule conique par M. A. Bravais



V. Remond imp. des Neiges 65 à Paris Mallet-Bachelier éditeur

QA
1
J684
t.19

Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY